



Analyse comparative de différentes lois de commande en vue du contrôle global du châssis

Luca Palladino

► To cite this version:

Luca Palladino. Analyse comparative de différentes lois de commande en vue du contrôle global du châssis. Automatique / Robotique. Université Paris Sud - Paris XI, 2006. Français. NNT : . tel-00273022

HAL Id: tel-00273022

<https://theses.hal.science/tel-00273022>

Submitted on 14 Apr 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITE PARIS-SUD XI
Faculté des Sciences d'Orsay

THÈSE DE DOCTORAT

SPECIALITE : PHYSIQUE

*Ecole Doctorale « Sciences et Technologies de l'Information des
Télécommunications et des Systèmes »*

Présentée par :

Luca PALLADINO

Sujet :

**ANALYSE COMPARATIVE DE DIFFÉRENTES LOIS DE
COMMANDE EN VUE DU CONTRÔLE GLOBAL DU CHASSIS**

Soutenue le lundi 4 décembre 2006..... devant les membres du jury :

M.	CHITOUR Y.	(président)
M.	DUC G.	(directeur de thèse)
M.	GUERRA T.M.	(rapporteur)
M.	MAMMAR S.	(rapporteur)
M.	POTHIN R.	(examineur)
M.	VAN DER WEIDEN A.J.J.	(examineur)

à mes parents

Remerciements

Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à Monsieur Gilles Duc, mon directeur de thèse et Professeur à Supélec, pour l'excellence de son encadrement. Sa grande disponibilité, son soutien constant, sa patience infinie et ses qualités pédagogiques hors du commun ont contribué au bon déroulement de cette thèse.

Je remercie Monsieur Richard Pothin, Docteur chez Renault et chef de l'UET Châssis de Direction des Etudes Avancées de Renault, et Monsieur Stéphane Guegan, ingénieur chez Renault, pour l'encadrement dont j'ai pu bénéficier pendant ces trois années.

Je remercie Monsieur Thierry Marie Guerra, Professeur à l'Université de Valenciennes, Monsieur Said Mammar, Professeur à l'Université d'Evry val d'Essonne, qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail en tant que rapporteurs.

Je remercie également Monsieur Yacine Chitour, Professeur à l'Université de Paris, d'avoir présidé et participé à mon jury de thèse.

Que Monsieur Antonius van der Weiden, Professeur à la Technische Universiteit de Delft, soit remercié pour avoir accepté d'y participer.

Je remercie Monsieur Patrick Boucher, chef du Département Automatique de Supélec, pour avoir cru en mes capacités et pour m'avoir accueilli chaleureusement dans son laboratoire.

Je remercie Monsieur Luc Bourgeois, chef du Puce Contrôle de Systèmes, pour m'avoir accueilli au sein de son service et pour m'avoir permis de réaliser ma thèse dans de bonnes conditions.

Je remercie également Monsieur Yves Le Vourc'h et Monsieur Lionel Lorimier, respectivement Ingénieur et Docteur à la Direction des Etudes Avancées de Renault, pour l'intérêt qu'ils ont réservé à mes travaux et pour les précieuses discussions que j'ai eu avec eux.

Que Monsieur Hervé Guéguen, Professeur à Supélec, soit remercié pour les précieuses discussions que j'ai eu avec lui.

Ce mémoire est le fruit d'une expérience que je porterai toujours dans mon coeur. Elle n'aurait jamais été possible sans les personnes avec lesquelles j'ai pu la partager. Je voudrais donc remercier tous les doctorants et le corps enseignant du Département Automatique de Supélec

ainsi que toutes les personnes de la Direction de la Recherche qui m'ont été proches pendant ces trois ans. Parmi toutes ces personnes, je voudrais dire un "grand" merci à Mara, Sophie, Bastien, Guillaume et Sorin pour tous les bons moments passés ensemble et pour me permettre, aujourd'hui, de comprendre de quoi l'avenir peut être fait.

Je voudrais aussi remercier Estelle pour avoir partagé avec moi les longs mois de rédaction et pour m'avoir soutenu et supporté tout au long de cette épreuve.

Un merci aussi à tous les amis de longue date qui m'ont toujours accordé leur soutien. Une mention toute spéciale à Luigi, Mauro et Stefano pour m'avoir fait la générosité d'être près de moi lors des mes derniers pas dans cette aventure.

Avant de conclure je voudrais remercier mon père et ma mère pour le soutien incessant qu'ils m'ont toujours apporté, pour leurs conseils et pour leur aide. Je voudrais aussi remercier ma famille toute entière pour m'avoir toujours poussé à donner le meilleur de moi-même.

Et pour conclure je voudrais remercier tous ceux qui m'ont permis de démontrer que toute passion vécue est tôt ou tard comblée d'une forte émotion.

Table des matières

1	Contexte du travail	1
2	Introduction	3
2.1	Motivations	3
2.2	Structure du Mémoire	7
3	Rappels Théoriques	9
3.1	Les Inégalités Matricielles Linéaires: LMI	9
3.1.1	Contexte général	9
3.1.2	Définitions et théorèmes	9
3.2	L'approche \mathcal{H}_∞	13
3.2.1	Le théorème du petit gain	13
3.2.2	Formulation du problème standard	14
3.2.3	Mise en oeuvre du problème H_∞	18
3.3	Introduction aux contrôleurs LPV	24
3.3.1	Représentation LPV	25
3.3.2	Solution du problème LPV et construction du contrôleur	27
3.3.3	Etude avec vitesse des paramètres limitée	31
3.4	La valeur singulière structurée	34
3.4.1	Mise en forme LFT	34
3.4.2	L'incertitude et sa structure	36
3.4.3	La valeur singulière structurée	37
3.5	Utilisation de ces outils dans le contexte de la thèse	39
4	Modélisation de la dynamique du véhicule	41
4.1	Introduction	41
4.2	Véhicule avec suspensions	41
4.3	Définition des repères	42
4.4	Modélisation pour les véhicules isolés	44
4.5	Modélisation linéaire pour les véhicules isolés	45
4.5.1	Modèle de la masse suspendue	46
4.5.2	Analyse d'une suspension	48
4.5.3	Formulation du Lagrangien	50
4.5.4	Fonction de dissipation de Rayleigh	52
4.5.5	Angle de dérive	52

4.5.6	Forces généralisées	53
4.5.7	Equations du véhicule	55
4.5.8	Equations de la suspension	58
4.5.9	Modèles utilisés	58
4.5.10	Conclusions	59
4.6	Modèle bicyclette	59
5	Synthèse des lois de commande mono actionneur	61
5.1	Introduction	61
5.2	Contrôle latéral	62
5.2.1	Etude bibliographique	62
5.2.2	Synthèse de la loi de commande	67
5.2.3	Contrôle du plan de roue	77
5.2.4	Contrôle avec freinage	92
5.2.5	Analyse de robustesse	98
5.2.6	Conclusion	101
5.3	Contrôle du roulis	102
5.3.1	Etude bibliographique	102
5.3.2	Synthèse des lois de commande pour le contrôle du roulis	105
5.3.3	Analyse de robustesse	113
5.3.4	Contrôle du lacet avec repartition du couple antiroulis	114
5.3.5	Solution proposée	117
5.4	Conclusions	118
6	Contrôle d'une dynamique avec plusieurs actionneurs	119
6.1	Introduction aux contrôleurs couplés	120
6.2	Résumé de la partie confidentielle	124
7	Dimensionnement des actionneurs et des capteurs	127
8	Conclusion générale et perspectives	129
A	Pneumatique	A-1
A.1	Modèle Brush	A-1
A.2	Modèle LuGre	A-5
A.3	Modèle de Pacejka ou formule magique	A-6
A.3.1	Dynamiques isolées	A-6
A.3.2	Couplage des efforts	A-8
B	Modèles de référence	B-1
B.1	Modèle de référence pour la vitesse de lacet	B-1
C	Réalisation du modèle pour la μ-analyse	C-1

D	LPV control of a road vehicle during braking action in curve	D-1
D.1	Introduction	D-1
D.2	Problem definition and model of the car	D-2
D.2.1	Light brake in curve	D-2
D.2.2	Model of the vehicle	D-2
D.3	LPV Control	D-3
D.3.1	Classical polytopic approach	D-4
D.3.2	Polytopic approach with bounded rate	D-4
D.4	Proposed solution	D-5
D.4.1	Definition of the polytope	D-5
D.4.2	Design of the control law	D-6
D.4.3	Results	D-7
D.5	Conclusion	D-8

Notations

Notations algébriques

\mathbf{N}	entiers naturels
\mathbf{R}	corps des réels
\mathbf{C}	corps des complexes
i	imaginaire pur ($i^2 = -1$)
$\mathbf{K}^{p \times m}$	algèbre des matrices de dimension $(p \times m)$ à coefficients dans \mathbf{K}
\otimes	produit de Kronecker
\star	produit de Redheffer
I_n	Matrice identité de dimension n
A^T	matrice transposée de A
A^{-1}	inverse de A
A^{-T}	transposée de l'inverse de A
A^\dagger	inverse de Moore-Penrose de A
$\text{Ker}(A)$	noyau de la matrice A
\overline{A}	matrice conjuguée de A
A^*	matrice transconjugée de A : \overline{A}^T
$\text{Re}(A)$	partie réelle de A : $\frac{1}{2}(A + \overline{A})$
$\text{Im}(A)$	partie imaginaire de A : $\frac{1}{2}i(A - \overline{A})$
$\lambda_{\max}(A)$	valeur propre maximale de A
\mathcal{RH}_∞	ensemble des matrices de transfert analytiques dans le demi-plan complexe droit (axe imaginaire compris)
$\ T(s)\ _\infty$	norme \mathcal{L} ou H_∞
$\overline{\sigma}(A)$	valeur singulière maximale de A : $\sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$

Notations véhicule

V	vitesse du véhicule
u	vitesse du véhicule selon l'axe x
v	vitesse du véhicule selon l'axe y
ψ	angle de lacet
θ	angle de tangage
ϕ	angle de roulis
γ	angle de carrossage
α	angle de dérive
ϕ_i	angle de roulis de l'essieu
δ_i	angle de braquage de la roue i
σ_p	pseudo glissement
C_i	coefficient de dérive
$c_{is(d)}$	coefficient de frottement visqueux
c_{pi}	coefficient de frottement visqueux du pneumatique
C_x	coefficient de dérive longitudinale
C_X	coefficient aérodynamique par rapport à X
C_Y	coefficient aérodynamique par rapport à Y
C_Z	coefficient aérodynamique par rapport à Z
K_i	raideur du ressort
P_i	raideur du pneumatique
χ_i	raideur de roulis
Γ_i	coefficient de frottement visqueux de roulis
$C_{\gamma i}$	coefficient de carrossage
F_{ai}	force produite par l'actionneur de la suspension active i
F_{pi}	force de Rayleigh des pneumatiques de l'essieu i
F_{si}	force de Rayleigh des suspensions de l'essieu i
F_{xaer}	force aérodynamique longitudinale

F_{xi}	force longitudinale de la roue i
F_{ye}	force latérale externe
F_{zaer}	force aérodynamique verticale
$F_{\phi aer}$	force aérodynamique par rapport au roulis
J_{XS}	moment d'inertie par rapport à X de la masse suspendue
J_{XZS}	moment d'inertie par rapport à XZ de la masse suspendue
J_{YS}	moment d'inertie par rapport à Y de la masse suspendue
J_{ZS}	moment d'inertie par rapport à Z de la masse suspendue
M_{xaer}	moment aérodynamique longitudinal
M_{yaer}	moment aérodynamique latéral
M_{zaer}	moment aérodynamique vertical
M_{ze}	moment aérodynamique vertical externe
m_i	masse non suspendue de l'essieu i
m_S	masse suspendue
Q_i	Force généralisée
\mathcal{T}	Energie cinétique
\mathcal{L}	Lagrangien
\mathcal{U}_g	Energie gravitationnelle
x_i	Distance de l'essieu du centre du repère voiture
t	voie du véhicule

Acronymes

LTI	linéaire invariant dans le temps
LTV	linéaire variants dans le temps
LFT	transformée linéaire fractionnaire
LMI	inégalité matricielle linéaire
LPV	linéaire à paramètres variants

Publications Personnelles

Conférences avec actes

L. Palladino, G. Duc, R. Pothin and Y. Le Vourc'h *Control of a braking action in curve for an automotive vehicle with an LPV methodology*, Dynamique du Véhicule et Confort de Suspension, 2005, Lyon.

L. Palladino, G. Duc and R. Pothin, *Contrôle assisté du mouvement latéral d'un véhicule routier par synthèse H_∞ "loop-shaping"*, Journée Doctorales d'Automatique, 2005, Lyon.

L. Palladino, G. Duc and R. Pothin, *LPV Control for μ -split braking assistance of a road vehicle*, Conference on Decision and Control and European Control Conference, 2005, Seville.

L. Palladino, G. Duc and R. Pothin, *Contrôleur LPV dédié au freinage en virage avec braquage et carrossage actifs*, Conférence Internationale Francophone d'Automatique, 2006, Bordeaux.

L. Palladino, G. Duc and R. Pothin, *LPV control of a road vehicle during braking action in curve*, 5th IFAC Symposium on Robust Control Design, 2006, Toulouse.

Revue

L. Palladino, G. Duc and R. Pothin, *Apport du carrossage au contrôle de la dynamique latérale*, Sciences et Technologies pour l'Automatique. (à paraître).

Chapitre 1

Contexte du travail

Cette thèse s’inscrit à mi chemin entre les recherches qui sont menées au Département Automatique de Supélec sur la commande robuste et celles qui sont conduites à la Direction de la Recherche de Renault sur la réalisation de systèmes multi-objectifs et multi-actionneurs pour le pilotage de véhicules légers.

Elle se doit donc d’être le trait d’union entre ces deux mondes, pour permettre d’appliquer les techniques robustes de l’Automatique développées dans l’industrie l’automobile et en accord avec les exigences de ce secteur.

Dans le domaine du contrôle de la dynamique du véhicule, l’industrie automobile a développé dans un premier temps des systèmes de contrôle monoactionneurs capables de piloter une seule dynamique à la fois. Vues les nouvelles exigences de l’industrie automobile en termes de performances et de confort cette approche s’avère limitée. Il s’avère donc nécessaire d’étudier une nouvelle structure permettant d’utiliser ensemble différents systèmes de contrôle de la dynamique d’un véhicule afin de satisfaire ces performances. Des tentative en ce sens ont été introduites par certains équipementiers pour des voiture haute gamme, en faisant coopérer plusieurs systèmes monoactionneurs. Plus généralement, cette nouvelle structure à mettre en place, qui est appelée ”Contrôle Global de Chassis”, doit donc piloter conjointement tous ces systèmes pour permettre :

- des gains en confort et en sécurité active, par la gestion optimisée des différents actionneurs.
- d’assurer la fiabilité du système global, par des études de robustesse multivariables et un pilotage intelligent et coordonné des différents systèmes.
- un dimensionnement au plus juste des différents systèmes.

Nous venons d’introduire les attentes de l’industrie automobile vis-à-vis de ce nouveau système de contrôle du comportement du véhicule. Il est évident que l’Automatique peut y répondre de façon satisfaisante. En effet depuis plusieurs années l’Automatique a affronté et proposé des solutions aux problèmes multicritères ainsi qu’aux problèmes de robustesse de lois de commande. Les lois que l’Automatique peut développer pour l’industrie automobile doivent

répondre aux points suivants :

- la robustesse de fonctionnement face à des variations de paramètres en termes de performance et de stabilité.
- un paramétrage/typage aisé des lois de commande : il faut pouvoir modifier facilement les lois en cas de changement de configuration lors d'essais sur véhicule.
- la possibilité d'ajouter de nouvelles prestations pour améliorer le confort et la sécurité
- la réduction des coûts au strict nécessaire par un choix et un dimensionnement des capteurs et des actionneurs.

En partant de ces constatations, il est possible de définir les objectifs de cette thèse qui sont :

- développer des commandes de gestion simultanée de deux ou trois actionneurs et mettre en avant les gains obtenus en terme de confort, de sécurité, de coût et de fiabilité
- dimensionner au plus juste les actionneurs et les capteurs retenus

Chapitre 2

Introduction

2.1 Motivations

Aujourd'hui lorsque nous regardons un véhicule routier, il est possible de constater la présence de plus en plus importante de l'électronique. Nous avons pu assister ces dernières années à un développement des systèmes d'aide au freinage d'urgence et d'aide au suivi de trajectoire.

Nous devons le développement de ces systèmes à la constatation faite par les constructeurs automobiles, que plusieurs de leurs clients n'étaient pas capables de contrôler leur véhicule lorsque celui-ci accentuait certaines de ses caractéristiques naturelles, comme par exemple le survirage dans le cas d'un véhicule à propulsion. L'introduction de ce type de systèmes a donc permis de limiter les problèmes liés à la conception du véhicule et a permis aux constructeurs de proposer des véhicules plus sûrs et plus faciles à conduire par un conducteur inexpérimenté.

Afin de mieux comprendre les situations qu'un conducteur quelconque n'est pas capable de gérer et qui peuvent être soit source d'accident soit source d'un mauvais comportement, des études ont été menées par les constructeurs. Parmi celles-ci nous pouvons rappeler celle réalisée par l'EESAR [DHMS05]. En regardant cette étude il est possible de constater que presque la moitié des accidents impliquant des véhicules légers concerne des véhicules en train d'effectuer soit un freinage soit une action volant afin d'éviter un obstacle sur la route. Il est donc facile de constater que le véhicule n'a pas pu répondre de façon satisfaisante à l'attente du client et en conséquence il n'a pas pu éviter l'accident. Ces études ont eu aussi la capacité de fournir aux constructeurs un ensemble de situations de conduite sur lesquelles définir les prestations visées par ces systèmes électroniques.

La définition de ces performances ainsi que des standards de satisfaction de la clientèle toujours plus élevés a conduit au développement de plusieurs systèmes électroniques ; parmi eux il est possible de trouver les systèmes sensés contrôler le moteur, ceux conçus pour éviter le patinage des roues, ceux qui ont pour but d'empêcher le blocage des roues et les systèmes conçus pour effectuer le suivi de trajectoire. Lorsque nous regardons les véhicules vendus aujourd'hui en Europe, il est possible de constater que tous sont équipés d'au moins un de ces systèmes.

La nécessité de réaliser ces systèmes comporte en soi deux problématiques : la première est de réaliser des systèmes d'aide à la conduite agissant chacun sur un ou plusieurs organes du véhicule. La deuxième est de faire travailler ensemble tous ces systèmes.

Chaque système d'aide à la conduite est basé logiquement sur des lois de commande. Ces lois devant considérer le fait que le véhicule est un système complexe qui est sujet à plusieurs incertitudes : des paramètres comme la masse, la vitesse, l'adhérence, les perturbations latérales ainsi que les caractéristiques de la route sont soit mal connues, soit inconnues.

Pour réaliser ces lois il est possible d'utiliser les compétences développées par l'automatique qui pendant ces dernières années a proposé des solutions à ce type de problèmes. Néanmoins toutes les méthodologies ne sont pas adéquates pour résoudre notre problématique : les méthodes utilisant des correcteurs du type PID ou à gains constants ne sont plus suffisantes pour satisfaire les performances envisagées par le constructeur automobile [AGS⁺95].

Les lois nécessaires pour satisfaire pleinement notre problème doivent satisfaire des critères de robustesse très importants. La conception des lois de commande est donc un problème de robustesse vis-à-vis des incertitudes et des perturbations. Il nous a donc paru logique d'utiliser les méthodologies H_∞ qui sont aujourd'hui largement utilisées pour la solution des problèmes de robustesse et dont les résultats théoriques sont bien connus. Ces méthodologies de commande ont fait l'objet de plusieurs années d'activité de recherche au sein du département Automatique de Supélec qui ont abouti entre autres à différents travaux [Mam92], [Fon95], [Sco97], [VC98], [Hir99] et [Rah04].

Il est sans doute simple de constater que le comportement d'un véhicule change en fonction de sa vitesse. Cette constatation a conduit plusieurs auteurs à utiliser des contrôleurs capables de prendre en considération cette caractéristique. Dans plusieurs solutions ces contrôleurs sont obtenus à partir de cartographies en utilisant des techniques d'interpolation. Cette solution n'est pas toujours très satisfaisante vis-à-vis de la robustesse et du comportement lors de variations rapides de la vitesse qui reste dans ces circonstances difficilement maîtrisable. Face à cette situation, les méthodologies LPV se présentent comme une extension naturelle des méthodes H_∞ . En utilisant cette théorie, il est possible de calculer des contrôleurs capables d'évoluer en fonction de la vitesse et aussi capables de garantir les propriétés de robustesse nécessaires.

Nous avons aussi besoin de pouvoir évaluer la robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques, les outils fournis par la μ -analyse qui ressortent eux aussi du même cadre nous permettront de répondre de manière complète à cette exigence.

En partant de ces considérations, il est possible d'obtenir plusieurs systèmes d'aide à la conduite chacun agissant sur un ou plusieurs organes du véhicule. Logiquement chaque système présente des avantages vis-à-vis de certaines situations de conduite et des désavantages par rapport à d'autres situations. Il est aussi possible de constater que les désavantages d'un système ne sont pas forcément communs avec ceux des autres. Il est donc possible d'envisager de faire travailler ensemble plusieurs contrôleurs afin d'exploiter de façon optimale les avantages de tous ces systèmes et de minimiser leurs désavantages. La réponse à ce problème est donc le

développement d'un système de contrôle intégré pour véhicule [AHB03] (IVCS en anglais).

Les principaux constructeurs automobiles et les principaux fournisseurs ont développé leur propre solution, par exemple, Toyota a développé et commercialisé le système VDIM (Vehicle Dynamics Integrated Management), tandis que Bosch de son côté a introduit sur le marché le système VDC (Vehicle Dynamics Control).

Pour mieux comprendre l'importance de développer un système capable de faire coopérer plusieurs contrôleurs à la fois, il est possible de reprendre rapidement les concepts introduits dans [TII92]. Supposons qu'on veuille évaluer le véhicule vis-à-vis de deux performances différentes que nous appellerons par la suite performance **a** et performance **b**. La première performance est garantie avec le système **A**, tandis que la deuxième est garantie par le système **B**. La coopération des deux contrôleurs pour aboutir aux meilleures performances est introduite sur la Figure 2.1. Il est possible de comprendre que lorsque les deux systèmes sont ensemble sans aucune précaution (**A+B**) les performances obtenues sont moins bonnes que celles obtenues lorsque les deux sont utilisés selon une logique précise (**A*B**).

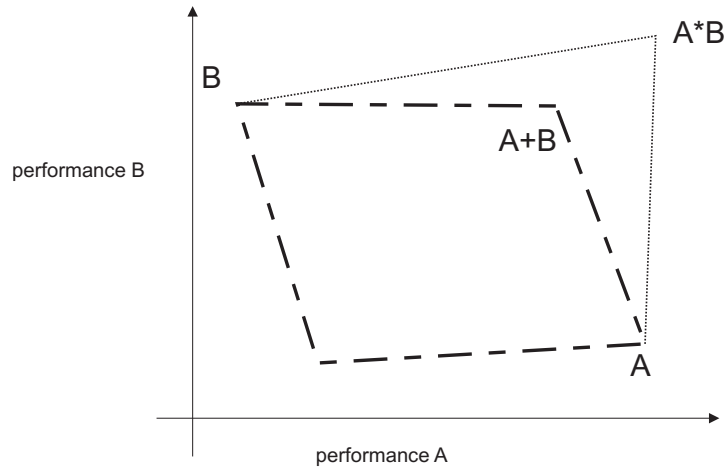


FIG. 2.1 – *Coopération des Contrôleurs*

Il est donc facile de comprendre l'intérêt d'utiliser une structure de commande capable de faire coopérer plusieurs systèmes en même temps. La figure 2.1 illustre, que les performances atteignables, avec une structure de commande capable de faire coopérer plusieurs systèmes d'aide à la conduite, sont toujours liées aux performances que chaque système peut améliorer séparément. Il en dérive que si nous voulons améliorer les performances du véhicule dans toutes les situations de conduite, nous sommes obligés d'utiliser des systèmes d'aide à la conduite agissant sur tous les organes du véhicule. Cette solution est sans doute coûteuse et donc rarement envisagée. Il est donc nécessaire de choisir une combinaison des systèmes d'aide à la conduite qui soit capable de satisfaire un sous-ensemble de performances P_1 le plus proche possible de l'ensemble de performances globales $P \supseteq P_1$ visé. Il y a plusieurs possibilités pour faire coopérer les contrôleurs. Parmi les structures possibles, on peut en dégager trois dont les caractéristiques

permettent de couvrir l'intégralité des structure existantes.

La structure la plus simple est celle de la figure 2.2, qui fait intervenir deux niveaux : le niveau bas où il y a tous les contrôleurs dédiés à l'asservissement des actionneurs et le niveau haut où il y a les contrôleurs capables de piloter le comportement de la voiture. Les contrôleurs du niveau haut sont conçus pour pouvoir communiquer et échanger des informations comme, par exemple, des mesures ou leur action sur les actionneurs. Dans cette structure tous les contrôleurs de niveau haut ont les mêmes droits. Il est donc possible d'avoir parfois des conflits entre eux. Pour pouvoir éviter les conflits et pour effectuer l'arbitrage entre les contrôleurs il est nécessaire d'introduire soit des priorités entre les contrôleurs soit un troisième niveau qui est dédié à la supervision de la structure (Figure 2.3). Le superviseur est donc conçu pour gérer les conflits et pour piloter les contrôleurs des manière optimale. Une autre tâche du superviseur peut aussi être de piloter les contrôleurs en fonction des attitudes du conducteur et donc de réaliser un contrôle "adaptatif" comme proposé dans [FSB⁺88].

L'avantage de ces deux structures est leur modularité : il est possible de prévoir d'ajouter ou de supprimer des actionneurs sans dénaturer la structure. Bien sûr parmi les solutions existantes il est possible d'en prévoir une où il y a un seul contrôleur capable de contrôler tous les actionneurs, comme par exemple celle de la figure 2.4. Cette structure a le gros inconvénient de manquer de modularité : lorsqu'un actionneur est supprimé il est nécessaire de procéder à une nouvelle synthèse de loi de commande.

Parmi les trois structures proposées, celles définies dans les figures 2.3 et 2.4 sont d'un point de vue industriel plus intéressantes : la simple somme de plusieurs contrôleurs sans une forme d'intelligence supérieure ne permet pas d'optimiser les performances atteignables par les systèmes employés, comme déjà illustré dans le diagramme des performances de la figure 2.1.

La définition de ces nouvelles structures introduit des nouveaux problèmes : la définition d'une structure de supervision et la définition d'une stratégie pour faire coopérer les contrôleurs. Il est possible de trouver des solutions à ces deux problématiques en utilisant des résultats de la théorie de systèmes hybrides, en ce qui concerne la supervision, des méthodologies d'optimisation, en ce qui concerne la coopération des contrôleurs.

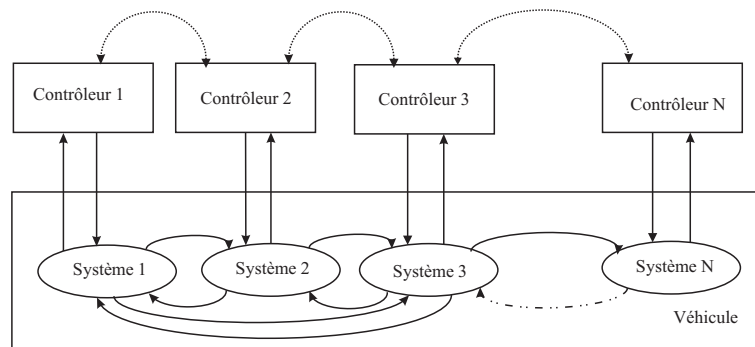


FIG. 2.2 – Définition d'une structure monovariante

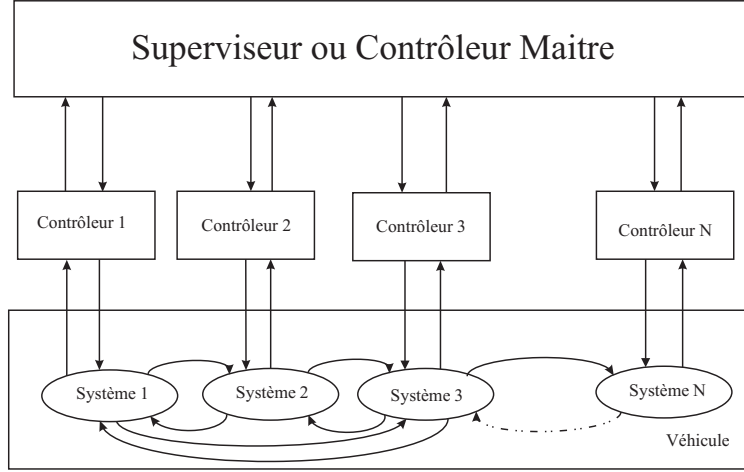


FIG. 2.3 – Définition d'une structure avec superviseur

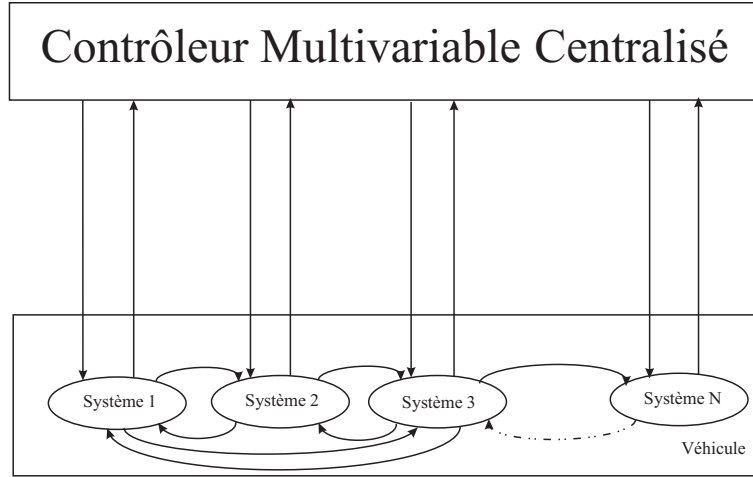


FIG. 2.4 – Définition d'une structure multivariable

2.2 Structure du Mémoire

Nous avons décidé de structurer le mémoire en cinq chapitres principaux (chapitres 3 à 7) qui sont suivis par des conclusions.

Nous introduirons d'abord les outils théoriques (chapitre 3) qui sont utilisées soit pour effectuer la synthèse des lois de commande soit pour en analyser la robustesse à savoir les méthodologies H_∞ et LPV que nous avons choisis pour effectuer la synthèse de contrôleurs. Vue la forte dispersion des paramètres mécaniques d'un véhicule, il est intéressant d'effectuer une analyse de robustesse des lois obtenues.

Le chapitre 4 est dédié à la modélisation du véhicule qui est utilisée pour synthétiser et

valider les lois de commande.

Nous introduisons par la suite dans le chapitre 5 les premières lois de commande. Ces lois sont capables d'agir sur un seul actionneur à la fois, c'est-à-dire qu'elles correspondent aux contrôleurs du deuxième niveau de la deuxième structure. Ces contrôleurs sont utilisés également dans le chapitre suivant.

L'étape suivante, résumée dans le chapitre 6, a logiquement abordé l'analyse comparative de la deuxième et de la troisième architecture. Elle a permis de tirer des conclusions sur les deux architectures d'un point de vue automatique. Les réglages des structures que nous avons présentées sont valables dans une situation de conduite très particulière. Les deux structures nécessitent donc la présence d'un superviseur capable de comprendre la situation de conduite et d'activer les bons contrôleurs avec les bons réglages.

Nous avons terminé notre travail (chapitre 7) par une étude des besoins des architectures et de leurs contrôleurs d'un point de vue capteurs et actionneurs. Les exigences du point de vue coût et consommation, mais également la possibilité d'implanter les solutions que nous avons présentées dans un véhicule ont été abordées.

Dans ce mémoire, les deux derniers chapitres n'ont pas pu être reproduits intégralement pour des raisons de confidentialité. Néanmoins les études entreprises ont été résumées dans ce mémoire tandis qu'elles sont exposées en détails dans un document annexe à cette thèse qui a été transmis à l'entreprise Renault.

La fin de cette démarche est ponctuée par une conclusion sur les architectures utilisées et sur les solutions automatiques introduites (chapitre 8). Le document est complété par 3 annexes présentant les modèles de pneumatique, des modèles de référence aujourd'hui utilisés dans le domaine automobile (qui sont nécessaires pour interpréter la volonté du conducteur) et un exemple d'écriture du modèle pour l'analyse de robustesse.

Tous les résultats présentés dans cette thèse sont le fruit de simulations réalisées en utilisant un simulateur non linéaire de la dynamique développé par Renault. Ce simulateur nous a permis de bien reproduire le comportement du véhicule en simulation et d'avoir un premier moyen de validation des lois de commande.

Chapitre 3

Rappels Théoriques

3.1 Les Inégalités Matricielles Linéaires : LMI

Les Inégalités Matricielles Linéaires, communément appelées LMI, constituent un outil de base dans la résolution des problèmes d'optimisation convexes sous contraintes qui sont très largement présentés et utilisés dans la suite. Ce paragraphe a donc pour but d'introduire les principales propriétés théoriques nécessaires par la suite.

3.1.1 Contexte général

Nous pouvons faire remonter l'utilisation des LMI à la fin du dix-neuvième siècle, lorsque Lyapunov a introduit des conditions de stabilité pour les systèmes linéaires sous la forme $\dot{x}(t) = Ax(t)$. La stabilité d'un tel système est équivalente à l'existence d'une matrice P symétrique et définie positive telle que $A^T P + P A < 0$. Aujourd'hui un des objectifs est d'exprimer les problèmes d'automatique complexes via le formalisme LMI. Le but est d'aboutir à une solution par optimisation convexe.

3.1.2 Définitions et théorèmes

Nous introduisons maintenant les théorèmes et les lemmes caractéristiques de l'approche par LMI. Nous n'avons pas l'ambition ici d'être exhaustifs sur l'apport des LMI, nous renvoyons les lecteurs intéressés au sujet à [BGFB94] ou à [SW05].

La matrice $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$ telle que $X = X^T$ est définie positive si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n - \{0\} \text{ noté aussi } \mathbf{R}^{n^*}, \quad x^T X x > 0$$

Définition LMI Une Inégalité Matricielle Linéaire peut être exprimée sous la forme [BGFB94] :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0$$

où $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ est le vecteur des m variables et $F_i = F_i^T \in \mathbf{R}^{m \times m}$ sont des matrices symétriques définies positives. Il est aussi possible de trouver des LMI non strictes qui auront la forme $F(x) \geq 0$, dans ce cas les matrices sont semi-définies positives. Par la suite, les contraintes sont sous la forme $F(x) < 0$; cette LMI est équivalente à $-F(x) > 0$.

Introduction de norme via les inégalités matricielles

Norme H_2 Soit un système stable et strictement propre de matrice de transfert $G(s)$ et de représentation d'état minimale $(A, B, C, 0)$. La norme H_2 de $G(s)$ s'exprimera par l'une des deux équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \|G\|_2 &= \sqrt{\inf_{P=P^T} \{ \text{trace}(CPC^T) / AP + PA^T + BB^T < 0 \}} \\ &= \sqrt{\inf_{Q=Q^T} \{ \text{trace}(B^T AB^T) / A^T Q + QA + C^T C < 0 \}} \end{aligned}$$

Norme L_∞ et H_∞ Soit le système linéaire décrit par la représentation d'état minimale :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

où : $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbf{R}^{p \times m}$.

La fonction de transfert d'un tel système est :

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Lorsque $T(s)$ n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire, il est possible de caractériser la norme L_∞ et H_∞ de la fonction de transfert avec les inégalités matricielles en utilisant le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- $\|T(s)\|_\infty < \gamma$
- il existe une matrice $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$ symétrique solution de l'inégalité matricielle :

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Lors de l'étude de la stabilité d'un système, une condition sur la matrice X doit être ajoutée. Ce résultat est connu sous le nom de " Lemme Borné Réel " [BGFB94].

Lemme 3.1.2 (Lemme Borné Réel) *Si le système est stable alors $\|T(s)\|_\infty < \gamma$ si et seulement si il existe une matrice X symétrique définie positive solution de la LMI :*

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.1}$$

Ce lemme est aussi valable si $\|T(s)\|_\infty \leq \gamma$: il est alors suffisant d'utiliser une inégalité large. Il est possible d'observer que la LMI précédente conduit à un problème de minimisation : il est possible de rechercher $\|T(s)\|_\infty$ en résolvant le problème :

$$\min_{\gamma, X=X^T > 0} (\gamma) \text{ sous la contrainte (3.1)}$$

Lemmes de manipulation des inégalités matricielles

Lemme de Schur

Ce lemme permet de transformer des inégalités non linéaires convexes en LMI.

Lemme 3.1.3 La LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ Sx^T & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

où $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ et $S(x)$ sont des matrices affines en x , est équivalente à

$$\begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \end{cases}$$

Dans le cas d'inégalités non strictes, le lemme précédent devient :

Lemme 3.1.4 La LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ Sx^T & R(x) \end{bmatrix} \geq 0$$

où $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ et $S(x)$ sont des matrices affines en x , est équivalente à

$$\begin{cases} R(x) \geq 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^+S(x)^T \geq 0 \\ S(x)(I - R(x)R(x)^+) = 0 \end{cases}$$

où $R(x)^+$ désigne la pseudo-inverse de Moore-Penrose de $R(x)$

Lemme d'élimination

Ce lemme est utilisé lors de la phase de synthèse des contrôleurs. Il est également appelé *Lemme de projection*. Sa formulation est la suivante :

Lemme 3.1.5 Soient trois matrices $G \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbf{R}^{n \times p}$ et $V \in \mathbf{R}^{n \times q}$. Les deux problèmes suivants sont équivalents :

$$\begin{aligned} & - \exists K \in \mathbf{R}^{p \times q} / G + UKV^T + VK^TU^T < 0 \\ & - \begin{cases} U^{\perp T}GU^{\perp} < 0 \\ V^{\perp T}GV^{\perp} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où U^{\perp} et V^{\perp} sont les compléments orthogonaux des matrices U et V : $U^TU^{\perp} = 0$ et $[UU^{\perp}]$ est de rang n ; la même chose est valable pour V^{\perp} .

Lemme de complétion

Ce lemme est utilisé notamment lors de la synthèse de correcteurs avec critère H_∞ . Il permet de restreindre le nombre de variables lorsqu'une inégalité matricielle fait intervenir une matrice et son inverse [PKPB91]

Lemme 3.1.6 *Soient $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbf{R}^{n \times n}$ avec $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$ et r entier positif, alors il existe les matrices $X_{12} \in \mathbf{R}^{n \times r}$, $X_2 \in \mathbf{R}^{r \times r}$ telle que $X_2 = X_2^T$ et*

$$\begin{aligned} - \begin{pmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & X_2 \end{pmatrix} &> 0 \\ - \begin{pmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & X_2 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} Y & * \\ * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si et seulement si $X = Y^{-1}$ et $\text{rang}(X - Y^{-1}) \leq r$

De l'équation de Riccati aux LMI

De nombreux problèmes d'automatique ont été résolus avec l'équation de Riccati. La solution des problèmes par LMI est numériquement plus coûteuse et elle engendre parfois des problèmes de convergence.

Lorsqu'elle existe, il est donc préférable encore aujourd'hui d'utiliser la solution par équation de Riccati au lieu d'utiliser la solution par LMI. Il est de toute façon intéressant d'analyser la formulation par inégalités matricielles. La méthodologie LMI reste intéressante lorsqu'il n'y a pas de solution analytique. Vue sa généralité la solution par LMI prend donc de plus en plus d'ampleur.

Définition 3.1.1 *Soit A, Q et P des matrices $n \times n$ réelles avec Q et P symétriques. Une équation algébrique de Riccati est l'équation matricielle suivante :*

$$A^T X + X A + X P X + Q = 0 \quad (3.2)$$

On associe à cette équation de Riccati une matrice Hamiltonienne H de dimension $2n \times 2n$:

$$H = \begin{bmatrix} A & P \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de H sont symétriques par rapport à l'axe réel. Si elle n'a pas des valeurs propres sur l'axe imaginaire, elle a donc n valeurs propres à partie réelle strictement négative et n à partie réelle strictement positive.

Il est intéressant maintenant de chercher une solution à l'équation de Riccati. Pour ça il est possible de trouver une base de l'espace propre associé aux valeurs propres à partie réelle négative de la matrice Hamiltonienne $[X_1^T X_2^T]^T$ avec $X_i \in \mathbf{C}^{n \times n}$. Si X_1 est inversible alors la solution de l'équation de Riccati (3.2) est $X = X_2 X_1^{-1}$. La matrice X est appelée solution stabilisante de (3.2) et elle peut être notée $X = \text{Ric}(H)$.

Pour conclure, il est possible de noter $\text{dom}(\text{Ric})$ l'ensemble des matrices Hamiltoniennes H qui vérifient les deux propriétés suivantes :

- H n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire
- les deux sous-espaces $\Im \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ et $\Im \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ sont complémentaires.

Relation entre équation de Riccati et LMI

Le théorème suivant fournit une relation entre les équations de Riccati et les LMI

Théorème 3.1.1 [ZD97] *Soit $P > 0$. Supposons que (A, P) soit commandable et qu'il existe une matrice $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$ symétrique telle que :*

$$XA + A^T X + X P X + Q < 0$$

Alors il existe une solution $X_+ > 0$ de l'équation de Riccati :

$$X_+ A + A^T X_+ + X_+ P X_+ + Q < 0$$

telle que les valeurs propres de $A + P X_+$ sont à partie réelle strictement positive.

3.2 L'approche \mathcal{H}_∞

Dans ce paragraphe les notions élémentaires de la synthèse par norme \mathcal{H}_∞ sont introduits. Tout d'abord des rappels sur le problème standard sont présentés. Par la suite une introduction à la synthèse par fonction de sensibilité est effectuée, avant d'aborder des rappels sur l'approche \mathcal{H}_∞ par loop shaping.

3.2.1 Le théorème du petit gain

Le théorème du petit gain est un des piliers de l'approche par la norme \mathcal{H}_∞ . Ce théorème est déduit des valeurs singulières et de la norme \mathcal{H}_∞ même. Il permet d'aller plus loin dans l'étude de la robustesse et de la stabilité en présence d'incertitudes dans le modèle.

L'analyse est conduite à partir d'une matrice de transfert $M(s)$ stable et d'une matrice de transfert $\Delta(s)$ inconnue représentant les incertitudes du système.

La stabilité de la boucle fermée de la figure 3.1 peut être analysée en utilisant le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *Si $M(s)$ et $\Delta(s)$ appartiennent à \mathbf{RH}_∞ , le système de la figure 3.1 est stable pour tout $\Delta(s)$ telle que $\|\Delta(s)\|_\infty < \alpha$ si et seulement si $\|M(s)\|_\infty \leq \alpha^{-1}$.*

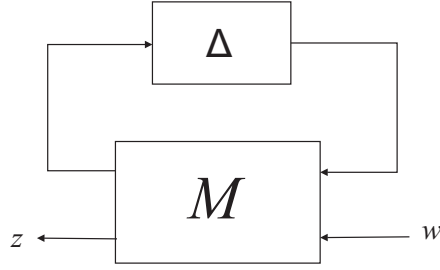


FIG. 3.1 – Schéma d'analyse de la robustesse de la stabilité

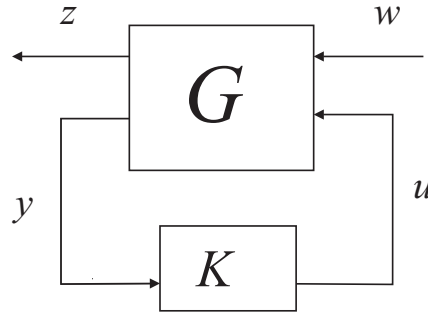


FIG. 3.2 – Configuration de contrôle

3.2.2 Formulation du problème standard

Pour effectuer la synthèse selon la norme \mathcal{H}_∞ , il est d'abord nécessaire d'introduire la notion de problème standard qui est représenté sur la figure 3.2.

Dans la structure du système, on retrouve ses entrées de commande u , ses sorties mesurables y , ses entrées exogènes w (qui peuvent être diverses perturbations, les consignes, ...) et les sorties à contrôler z qui sont des erreurs à minimiser pour obtenir les objectifs de la loi de contrôle. K est le correcteur recherché. En représentant G et K par fonction de transfert, le schéma de la figure 3.2 s'écrit :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$u = K(s)y \quad (3.4)$$

Le système G peut aussi être représenté sous forme d'état :

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]$$

La fonction de transfert en boucle fermée peut être mise sous la forme de transformation fractionnaire linéaire (Linear Fractional Transformation - LFT) inférieure. Ce qui mène à l'équation suivante.

$$z = \mathcal{F}_l(G, K) w$$

où la transformation est exprimée par la formule suivante :

$$\mathcal{F}_l(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (3.5)$$

Cette équation est obtenue directement à partir de (3.3) et (3.4).

Le problème \mathcal{H}_∞ peut être formulé sous deux formes différentes : la forme optimale et la forme sous-optimale.

Contrôleur \mathcal{H}_∞ Optimal Dans ce cas le problème consiste dans la recherche d'un contrôleur ou d'une famille de contrôleurs telles que $\|\mathcal{F}_l(G, K)\|_\infty$ soit minimale. Ce problème est sans doute de solution difficile et coûteuse; nous nous limitons donc dans la suite au seul cas sous-optimal.

Contrôleur \mathcal{H}_∞ Sous-Optimal Étant donnée une valeur $\gamma > 0$, le problème consiste dans la recherche d'un contrôleur ou d'une famille de contrôleurs telles que $\|\mathcal{F}_l(G, K)\|_\infty < \gamma$. Il est important de souligner que souvent, par abus de langage, le contrôleur qui assure γ le plus faible est dit optimal. La condition de sous-optimalité implique que la fonction de transfert entre les entrées exogènes w et les sorties à contrôler z a une norme \mathcal{H}_∞ inférieur à γ .

Résolution par équation de Riccati

Cette approche est désormais utilisée depuis une vingtaine d'années et c'est sans doute la solution du problème \mathcal{H}_∞ la plus simple et la plus utilisée.

Dans sa formulation classique le problème \mathcal{H}_∞ doit vérifier certaines hypothèses pour pouvoir être résolu.

Les hypothèses régissant le problème sont :

- I. (A, B_2) est commandable, (C_2, A) est observable
- II. D_{12} et D_{21} sont des matrices de rang plein
- III. $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ est de rang plein par rapport aux colonnes pour toute valeur de ω
- IV. $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ est de rang plein par rapport aux lignes pour toute valeur de ω

Tandis que la première hypothèse est commune à toutes les méthodes de commande, les autres sont propres à la méthodologie \mathcal{H}_∞ . Une illustration plus détaillée du sens de ces hypothèses peut être trouvé dans ([ZDG94] et [SP05]).

Il est maintenant possible d'écrire le théorème suivant qui permet de trouver un contrôleur pour le problème sous-optimal.

Théorème 3.2.2 [SP05] *Pour la structure générale de la figure 3.2 avec les équations (3.3) et (3.4) et les hypothèses précédentes, il existe un contrôleur $K(s)$ telle que $\|\mathcal{F}_l(G, K)\|_\infty < \gamma$ si et seulement si :*

- *il existe une matrice $X_\infty \geq 0$ solution de l'équation de Riccati :*

$$A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty = 0$$

telle que $[A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty]$ a toutes les valeurs propres à partie réelle strictement négative

- *il existe une matrice $Y_\infty \geq 0$ solution de l'équation de Riccati :*

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T + B_1 B_1^T + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty = 0$$

telle que $[A + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)]$ a toutes les valeurs propres à partie réelle strictement négative

- $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

Ce théorème nécessite donc la solution de deux équations de Riccati et la dernière condition introduit un lien entre les deux solutions.

Théorème 3.2.3 *Sous les conditions du théorème 3.2.2, il est possible d'obtenir le contrôleur rationnel $K = \mathcal{F}_l(K_C, Q)$ qui stabilise le système et satisfait la condition $\|\mathcal{F}_l(G(s), K(s))\|_\infty < \gamma$ où*

$$K_c(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \frac{A_\infty}{F_\infty} & \frac{-Z_\infty L_\infty}{0} & \frac{Z_\infty B_2}{I} \\ \hline -C_2 & I & 0 \end{array} \right]$$

$$F_\infty = -B_2^T X_\infty, \quad L_\infty = -Y_\infty C_2^T, \quad Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$$

$$A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$$

et $Q(s)$ est une fonction de transfert propre et stable telle que $\|Q(s)\|_\infty < \gamma$

Le contrôleur \mathcal{H}_∞ obtenu avec le théorème 3.2.2 lorsque $Q = 0$ est appelé contrôleur central où contrôleur d'entropie minimale.

Résolution par inégalités matricielles affines - LMI

Dans le paragraphe précédent, l'approche de résolution par l'équation de Riccati a été introduite. Par la suite la résolution par LMI est présentée. Introduite dans [GA96], cette méthodologie reste plus générale que la précédente. Elle permet de relaxer les hypothèses qui sont à la base du problème H_∞ . Dans la suite la problématique est présentée sous l'hypothèse que la condition suivante soit satisfaite :

$$D_{22} = 0$$

Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, il est possible de s'y ramener avec un simple changement de variable. Précédemment, lorsque la solution par équation de Riccati a été présentée, deux théorèmes ont été utilisés. Lors du premier théorème (3.2.2) nous avons introduit les conditions d'existence du contrôleur, tandis que lors du deuxième théorème (3.2.3), nous avons introduit la reconstruction du contrôleur. La solution du problème sera présentée ici d'une façon similaire. Lors de la solution par LMI seules deux hypothèses sont nécessaires.

- (A, B_2) est commandable et (C_2, A) est observable
- $D_{22} = 0$

Théorème 3.2.4 *Sous les hypothèses précédentes, le problème H_∞ standard a une solution si et seulement si 2 matrices symétriques et définies positives R et S existent telles que les 3 trois LMI suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} AR + RA^T & RC_e^T & B_1 \\ C_2 R & -\gamma I_{n_y} & D_{21} \\ B_1^T & D_{21}^T & -\gamma I_{n_w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_S & 0 \\ 0 & I_{n_y} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T S + SA & SB_w & C_2^T \\ B_1^T S & -\gamma I_{n_w} & D_{21}^T \\ C_2 & D_{21} & -\gamma I_{n_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_S & 0 \\ 0 & I_{n_y} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{pmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{pmatrix} \geq 0 \quad (3.8)$$

où \mathbf{N}_R et \mathbf{N}_S sont des bases des noyaux de $\begin{pmatrix} B_u^T & D_{eu}^T \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} C_z & D_{zw} \end{pmatrix}$ respectivement. Le contrôleur obtenu sera d'ordre n . Un contrôleur d'ordre $r < n$ existe si et seulement si les LMI précédentes sont vérifiées pour des matrices R et S qui satisfont la condition supplémentaire suivante :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{pmatrix} \leq r + n \iff \text{rang} (I_n - RS) \leq r$$

En résolvant un problème de minimisation sous les contraintes LMI précédentes, il est possible de trouver la valeur optimale de γ :

$$\min_{R=R^T, S=S^T} \gamma \quad \text{sous} \quad (3.6), (3.7) \text{ et } (3.8)$$

Le théorème (3.2.4) fournit une condition d'existence du contrôleur, lorsqu'elle est vérifiée, il est possible de reconstruire le contrôleur en partant des matrices R et S .

Soit la représentation d'état du contrôleur d'ordre $r \leq n$ cherché :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c z(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) + D_c z(t) \end{cases}$$

avec $x_c \in \mathcal{R}^r$

Le système en boucle fermée $\mathcal{F}_l(G(s), K(s))$ a pour représentation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} A + B_1 D_c C_1 & B_1 C_c & B_1 + B_u D_c D_{11} \\ \hline B_c C_1 & A_c & B_c D_{11} \\ \hline C_2 + D_{22} D_c C_z & D_{22} C_c & D_{21} + D_{22} D_c D_{11} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ x_c \\ e \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ x_c \\ e \end{pmatrix}$$

D'après le lemme 3.1.2 la norme H_∞ est inférieure à γ si et seulement si il existe une matrice $X = X^T > 0$ vérifiant la condition suivante :

$$\begin{pmatrix} A_f^T X + X A_f & X B_f & C_f^T \\ B_f^T X & -\gamma I_{n_w} & D_f^T \\ C_f & D_f & -\gamma I_{n_e} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.9)$$

L'inégalité matricielle précédente est bilinéaire en X , A_c , B_c , C_c et D_c . Une matrice X satisfaisante peut être obtenue avec une décomposition en valeurs singulières de $I_n - RS$. Il est donc possible d'obtenir 2 matrices $M, N \in \mathcal{R}^{n \times r}$ de rang plein vérifiant l'équation suivante :

$$MN^T = I_n - RS$$

qui permettent de déterminer :

$$X = \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & -M^+ RN \end{pmatrix}$$

où M^+ est la pseudo-inverse de M . L'inégalité (3.9) est alors une LMI qui permet d'obtenir les matrices d'état A_c , B_c , C_c et D_c du contrôleur.

3.2.3 Mise en oeuvre du problème H_∞

Dans la littérature, on trouve deux façons de mettre en oeuvre le problème H_∞ introduit précédemment. D'une côté il est possible d'utiliser l'approche par fonction de sensibilité, de l'autre il est possible de résoudre le problème via l'approche par loop-shaping.

Mise en forme du problème par fonction de sensibilité Cette mise en oeuvre de la problématique H_∞ prend son nom du fait qu'ici le problème consiste en le modelage des fonctions de sensibilité du système. Avant de donner les détails de la méthodologie, nous voulons introduire la définition de la fonction de sensibilité S et de la fonction de sensibilité complémentaire T .

Considérons la figure 3.3 avec le modèle du système à asservir $G(s)$ et le contrôleur à calculer $K(s)$. Le contrôleur doit asservir la sortie y sur la référence r . Dans la structure du système en boucle fermée, il est aussi possible d'introduire un signal de perturbation b . La structure analysée ici est une structure monovariante. Nous regardons ce cas pour des raisons de simplicité, mais la méthodologie développée peut être appliquée facilement au cas multivariable.

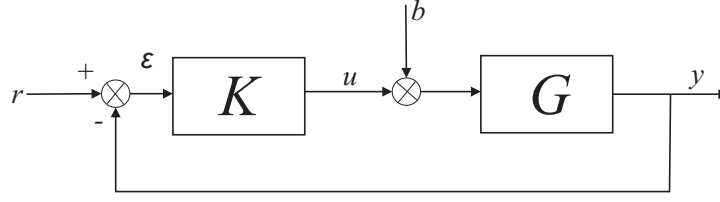


FIG. 3.3 – Schéma considéré pour la fonction de sensibilité

Les transferts entre les entrées du système et les signaux ε et u peuvent être facilement obtenus sous forme matricielle comme dans l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} E(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = M(s) \begin{pmatrix} R(s) \\ B(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(s) & -S(s)G(s) \\ K(s)S(s) & -T(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(s) \\ B(s) \end{pmatrix}$$

où la fonction de sensibilité est $S(s) = (1 + G(s)K(s))^{-1}$ et vue la structure monovariante du système la fonction de sensibilité complémentaire est $T(s) = 1 - S(s)$. La matrice des fonctions de transfert fait intervenir les principales fonctions concernant le système en boucle fermée.

Le problème H_∞ déduit de la structure de la figure 3.3 consiste à trouver une valeur positive γ et un contrôleur $K(s)$ qui stabilise le système bouclé et garantit une norme H_∞ inférieure à γ :

$$\|F_l(G(s), K(s))\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} S(s) & -S(s)G(s) \\ K(s)S(s) & -T(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma$$

En observant l'équation précédente, il est possible de comprendre que la solution de ce problème consiste en un compromis entre les objectifs de performance souhaités et les moyens nécessaires pour les obtenir.

Analyse des fonctions de transfert par approche classique Lorsqu'un contrôleur classique est synthétisé une des premières choses à vérifier est le comportement asymptotique du système dans le domaine fréquentiel. En reprenant l'approche de [DF99] il est possible de considérer les deux approximations suivantes.

- $|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1$: cette approximation est en général valable en basse fréquence. Elle implique les simplifications suivantes au niveau des transferts de 3.2.3 :

$$\begin{aligned} S(j\omega) &\approx (G(j\omega)K(j\omega))^{-1} \\ S(j\omega)G(j\omega) &\approx K(j\omega)^{-1} \\ K(j\omega)S(j\omega) &\approx G(j\omega)^{-1} \\ T(j\omega) &\approx 1 \end{aligned}$$

- $|G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1$ cette approximation est valable en haute fréquence. On obtient alors pour les transferts de 3.2.3 :

$$\begin{aligned} S(j\omega) &\approx 1 \\ S(j\omega)G(j\omega) &\approx G(j\omega) \\ K(j\omega)S(j\omega) &\approx K(j\omega) \\ T(j\omega) &\approx K(j\omega)G(j\omega) \end{aligned}$$

Par ailleurs, il est intéressant de souligner que les fonctions $S(s)$ et $T(s)$ sont directement liées aux marges de stabilité du système. Plus les normes H_∞ de $S(s)$ et $T(s)$ sont faibles meilleurs sont les marges de stabilité. Il est aussi intéressant de constater que la marge de module est l'inverse du maximum de $|S(j\omega)|$. La fonction $K(s)S(s)$ joue sur la bande passante, mais aussi sur l'amplitude de la commande. Donc le modelage de cette fonction a un impact sur la dynamique des actionneurs et les ressources demandées pour garantir les performances. La possibilité de contraindre la fonction $T(s)$ est intéressante, parce qu'elle permet d'améliorer le problème de poursuite et l'atténuation des bruits.

Introduction des pondérations

Dans le paragraphe précédent une petite dissertation sur les objectifs a été faite. Il est maintenant possible de passer à l'introduction des pondérations fréquentielles qui permettent de privilégier ou non un domaine de fréquence avec le but de satisfaire les objectifs fixés.

Lorsque des filtres de pondération sont introduits, il est possible de modifier les équations du problème de la manière suivante en accord avec la figure 3.4.

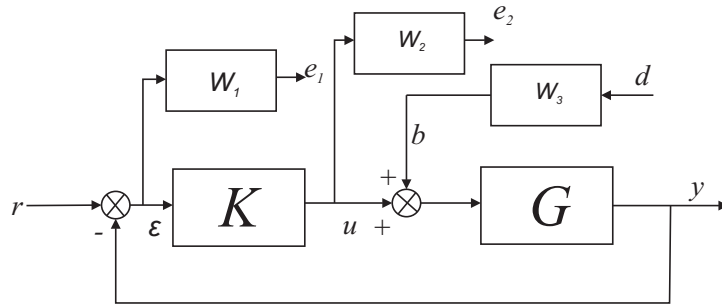


FIG. 3.4 – Schéma considéré pour le cas avec pondérations

$$\begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{pmatrix} = M(s) \begin{pmatrix} R(s) \\ D(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(s)S(s) & -w_1(s)S(s)G(s)w_3(s) \\ w_2(s)K(s)S(s) & -w_2(s)T(s)w_3(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(s) \\ D(s) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Comme pour le cas sans pondérations, le problème H_∞ correspondant consiste en la détermination d'une valeur γ positive et d'un contrôleur $K(s)$ qui stabilise le système et qui soit capable de satisfaire la condition suivante :

$$\left\| \begin{pmatrix} w_1(s)S(s) & -w_1(s)S(s)G(s)w_3(s) \\ w_2(s)K(s)S(s) & -w_2(s)T(s)w_3(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (3.11)$$

Résoudre le problème (3.11) au lieu de celui proposé précédemment permet de modeler plus facilement les transferts $S(s)$, $K(s)$, $S(s)G(s)$ et $T(s)$. L'équation (3.11) peut être décomposée dans ses parties élémentaires afin de voir l'influence des pondérations sur les différentes fonctions de transfert de (3.2.3) :

$$\begin{aligned} \|w_1(s)S(s)\|_\infty < \gamma &\iff \forall \omega \in \mathbf{R} & |S(j\omega)| < \frac{\gamma}{|w_1(j\omega)|} \\ \|w_2(s)K(s)S(s)\|_\infty < \gamma &\iff \forall \omega \in \mathbf{R} & |K(j\omega)S(j\omega)| < \frac{\gamma}{|w_2(j\omega)|} \\ \|w_1(s)S(s)G(s)w_3(s)\|_\infty < \gamma &\iff \forall \omega \in \mathbf{R} & |S(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{|w_1(j\omega)w_3(j\omega)|} \\ \|w_2(s)T(s)w_3(s)\|_\infty < \gamma &\iff \forall \omega \in \mathbf{R} & |T(j\omega)| < \frac{\gamma}{|w_2(j\omega)w_3(j\omega)|} \end{aligned}$$

Le choix des filtres $w_i(s)$ est très important : ils sont dans la plupart des cas soit des filtres passe-bas, soit des filtres passe-haut. Dans certains cas, il est possible d'accepter des constantes. Tous les filtres doivent être stables pour pouvoir garantir les hypothèses propres au problème H_∞ . Pour le choix des filtres, il est possible de suivre les indications données dans [DF99] et [SP05]. Pour conclure, nous voulons porter l'attention du lecteur sur le fait que le problème trouve facilement une solution lorsqu'il y a seulement deux ou trois filtres de pondérations à régler. Si le problème H_∞ comporte un nombre plus important de pondérations la gestion des différents degrés de liberté devient plus pénible et donc la solution est plus difficile à trouver.

Approche H_∞ par "loop-shaping"

L'approche proposée dans ce paragraphe complète celle proposée dans le paragraphe précédent. Ici la méthodologie H_∞ est présentée en combinaison avec une approche "loop-shaping" comme dans [FG92], pour un système normalisé selon les facteurs premiers.

Lorsque cette méthodologie est utilisée le développement de la loi de commande se fait en deux étapes. Le modèle en boucle ouverte est d'abord augmenté avec des filtres de pré- et de post- compensation afin de réaliser le "modelage" de la réponse fréquentielle en boucle ouverte. Ce modelage est réalisé à partir d'un contrôleur synthétisé précédemment ou à partir de la connaissance du système et de sa réponse fréquentielle. À partir du modèle ainsi élargi, on calcule ensuite la factorisation première.

Problème de stabilisation Considérant un modèle $G(s)$ qui doit être stabilisé, il est possible de définir sa factorisation première à gauche en utilisant l'expression suivante :

$$G = M^{-1}N$$

Lorsque le modèle de départ est supposé perturbé (nous noterons ce modèle G_p) cette factorisation première devient :

$$G_p = (M + \Delta_M)^{-1} (N + \Delta_N)$$

où M, N, Δ_M et $\Delta_N \in \mathbf{RH}_\infty$ et $\|\Delta_M \ \Delta_N\|_\infty < \epsilon$ (figure 3.5). Pour un correcteur K donné, la plus grande valeur de ϵ telle que K stabilise tous les modèles G_p est appelée la marge de stabilité.

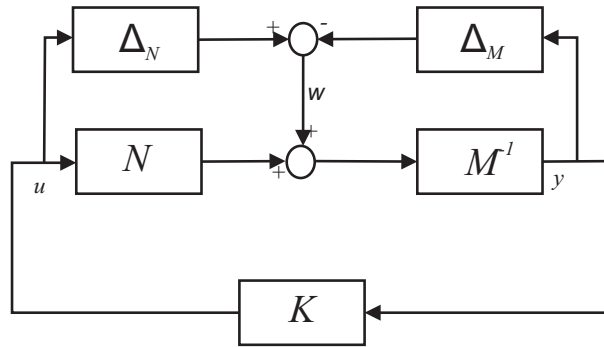


FIG. 3.5 – Problème de stabilisation H_∞

La maximisation de la marge de stabilité passe par la résolution du problème de stabilité d'un modèle factorisé selon les facteurs premiers. Cette problématique a été résolue dans [FG92] et le théorème suivant nous permet d'obtenir la solution.

Théorème 3.2.5 *Pour le système en boucle fermée de la figure 3.5, la stabilité est obtenue pour tout $\|\Delta_M \Delta_N\| < \epsilon$ si et seulement si*

$$\gamma_K = \left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} M^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\epsilon}$$

Le modèle nominal $G(s)$ doit être commandable et observable. La démonstration du théorème 3.2.5 s'appuie sur le théorème du petit gain.

Il est intéressant de souligner que γ_K est la norme H_∞ entre w et $\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$. $(I - GK)^{-1}$ est, comme dans les paragraphes précédents, la fonction de sensibilité.

Comme dans [FG92], la plus faible valeur de γ_K correspond à la marge de stabilité la plus importante et elle peut être définie selon la formulation suivante :

$$\gamma_{min} = \epsilon_{max}^{-1} = \left\{ 1 - \|NM\|_H^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(1 + \rho(XZ))}$$

où $\|\times\|_H$ est la norme de Hankel et ρ est le rayon spectral. Z est la seule solution de l'équation de Riccati (3.12) définie positive, pour une représentation minimale (A, B, C, D) du modèle G et X est la seule solution de l'équation de Riccati (3.13) définie positive :

$$\begin{aligned} (A - BS^{-1}D^TC)Z + Z(A - BS^{-1}D^TC)^T - ZC^TR^{-1}CZ + BS^{-1}B^T &= 0 \\ \text{avec} \quad R &= I + DD^T \quad S = I + D^TD \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$(A - BS^{-1}D^TC)^TX + X(A - BS^{-1}D^TC) - XBS^{-1}B^TX + C^TR^{-1}C = 0 \quad (3.13)$$

La formulation précédente peut être simplifiée lorsque le modèle est strictement propre, auquel cas $D = 0$. Dans ce cas, il est possible de retrouver la formulation de [ZDG94].

Il est alors possible de définir un contrôleur, dit central, capable de garantir la norme H_∞ suivante.

$$\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} M^{-1} \right\|_\infty \leq \gamma$$

pour toute valeur $\gamma > \gamma_{min}$.

Ce contrôleur est le suivant :

$$\begin{aligned} K &= \left[\frac{A + BF + \gamma^2(L^T)^{-1}ZC^T(C + DF)}{B^TX} \middle| \frac{\gamma^2(L^T)^{-1}ZC^T}{-D^T} \right] \\ F &= -S^{-1}(D^TC + B^TX) \\ L &= (1 - \gamma^2)I + XZ \end{aligned}$$

Procédure de réalisation par "loop-shaping" Les résultats du paragraphe précédent sont rarement utilisés tous seuls : dans l'approche précédente il y a bien le concept de stabilité, mais celui de performance est totalement absent. C'est pour cette raison que McFarlane et Glover, dans [FG92], ont introduit l'idée d'utiliser des filtres de pré- et de post compensation pour modeler le système en boucle ouverte.

Avec cette hypothèse la structure du modèle et de son contrôleur est celle de la figure 3.6. Si les filtres de pré- et de post- compensation sont W_1 et W_2 respectivement, il est possible de définir un modèle élargi G_a sous la forme suivante :

$$G_a = W_2 G W_1$$

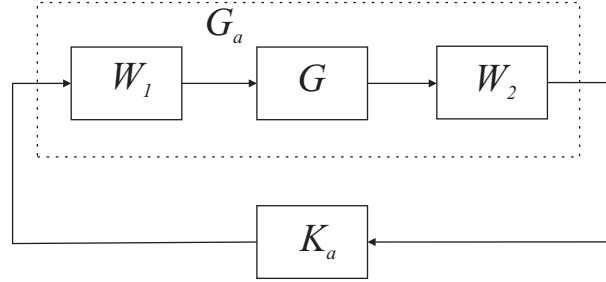


FIG. 3.6 – Structure du système élargi

Le contrôleur K_a sera donc capable de stabiliser le modèle élargi. La factorisation première présentée dans le paragraphe précédent est maintenant appliquée au modèle élargi, en écrivant $G_a = M_a^{-1} N_a$. Le contrôleur obtenu, à partir du modèle élargi, n'est pas le "vrai" contrôleur du modèle du départ, mais il doit prendre en considération les filtres. Le contrôleur pour asservir le modèle G est donc $K = W_1 K_a W_2$.

D'un point de vue pratique, il est intéressant de donner quelques indications sur le choix des filtres. Le pré-compensateur $W_1(s)$ est en général composé de filtres passe-bas, afin de filtrer les hautes fréquences, pour à la fois atténuer les bruits de mesure et assurer une bonne robustesse aux dynamiques négligées. Il permet aussi de ne pas solliciter trop fortement les commandes dans les hautes fréquences, et de diminuer ainsi la sollicitation des actionneurs. Le post-compensateur $W_2(s)$ est choisi en général de façon à obtenir des gains élevés en basses fréquences (par exemple au moyen d'actions intégrales), de façon à garantir ainsi la précision de la correction. Pour améliorer les marges de stabilité, il est aussi possible de placer des correcteurs à avance de phase, soit dans $W_1(s)$ soit dans $W_2(s)$.

3.3 Introduction aux contrôleurs LPV

Beaucoup de contrôleurs modernes sont développés pour contrôler des systèmes dynamiques dont la dynamique varie en fonction d'un ou plusieurs paramètres; les contrôleurs doivent donc évoluer eux aussi en fonction de ces mêmes paramètres. Cette considération nous permet d'introduire le problème du "gain scheduling".

Normalement cette technique consiste en la synthèse de plusieurs contrôleurs dans des conditions typiques de fonctionnement. Ces contrôleurs sont ensuite interpolés, de façon à faire évoluer le contrôleur, comme par exemple dans [SA91a]. Le problème majeur de cette solution

est sans doute l'interpolation : elle n'est pas évidente et souvent elle ne permet pas de garantir les propriétés de stabilité du système en boucle fermée. Une analyse des propriétés de robustesse vis-à-vis de variations lentes des paramètres est présentée dans [SA91b].

L'approche par interpolation n'est pas présentée dans ce paragraphe. Notre attention est en effet dédiée à l'étude du problème de la recherche d'un contrôleur qui soit capable d'évoluer en fonction de la mesure du paramètre selon l'approche proposée dans [AGB95].

3.3.1 Représentation LPV

Suivant la notation utilisée dans [SC92], un système linéaire à paramètres variants (LPV) est un système variant dans le temps où la représentation d'état est fonction d'un vecteur de paramètres $\theta(t)$. Le système LPV est donc représentable sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\theta(t))x + B(\theta(t))u \\ y &= C(\theta(t))x + D(\theta(t))u\end{aligned}$$

Cette représentation peut être considérée suivant deux points différents :

- il est possible de concevoir ce système comme un système linéarisé variant en fonction des paramètres incertains $\theta(t)$
- il est possible de le considérer comme un système linéaire à coefficients variables, qui évoluent en fonction du vecteur de paramètres $\theta(t)$.

Lorsqu'un système appartient à la première classe, il est possible d'utiliser les techniques de commande robuste qui ont été développées pour les systèmes linéaires. Par contre, lorsque le système appartient à la deuxième catégorie et si le vecteur de paramètres $\theta(t)$ est mesurable, il est possible de développer une stratégie de commande qui soit fonction de θ .

On s'intéresse ici à la deuxième classe de problèmes. L'approche LPV consiste ici dans la recherche d'un contrôleur qui soit lui-même fonction des paramètres $\theta(t)$. La structure du contrôleur est donc la suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_K &= A_K(\theta(t))x_K + B_K(\theta(t))y \\ u &= C_K(\theta(t))x_K + D_K(\theta(t))y\end{aligned}$$

Dans la littérature, il est possible de trouver deux approches différentes pour résoudre ce problème : la première est l'approche par LFT, tandis que la deuxième est celle utilisant les polytopes. Nous avons décidé de présenter ici seulement l'approche polytopique qui est la seule utilisée dans la suite de ce mémoire.

Certaines hypothèses sont nécessaires avant de continuer :

- les matrices d'état sont affines par rapport au paramètre variant θ

- θ est mesuré en temps réel

Comme dans [AGB95], l'attention est portée sur la synthèse d'un contrôleur dépendant des paramètres. Les techniques qui ont été développées pour résoudre ce problème s'appuient sur l'extension des techniques utilisées dans [GA96] au cas LPV et sur l'application du lemme borné réel. Il en dérive que le contrôleur calculé satisfait la performance \mathcal{H}_∞ quadratique classique. Sous ces hypothèses, le problème consiste en la solution d'un problème LMI. Avant d'introduire le problème, on doit introduire certains concepts qui sont utilisés dans la suite.

Une matrice polytopique est définie comme l'ensemble convexe d'un nombre fini de matrices N_i de même dimension.

$$C\{N_i, i = 1, \dots, r\} = \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i N_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \right\}$$

Vue la structure du problème qui est considéré dans la suite, il est possible d'effectuer les mêmes hypothèses faites dans [AGB95].

- les matrices d'état $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ et $D(\theta)$ ont une dépendance affine dans le paramètre θ
- le paramètre variant θ évolue à l'intérieur d'un polytope Θ sommets $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$

$$\theta \in \Theta = C\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$$

Définition 3.3.1 *Un système est dit polytopique lorsqu'il peut être représenté par des matrices d'état $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ et $D(\theta)$ où le paramètre θ varie à l'intérieur d'un polytope fixe et la dépendance de $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ et $D(\cdot)$ par rapport à θ est affine.*

Avant d'introduire la solution du problème LPV, il est nécessaire d'introduire certains théorèmes nécessaires à la résolution du problème. Nous avons donné plus haut le lemme borné réel qui est valable pour les systèmes LTI. Pour effectuer son extension au cas LPV, il faut introduire la notion de performance quadratique \mathcal{H}_∞ .

Définition 3.3.2 Performance quadratique \mathcal{H}_∞

Le système LPV :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B(\theta)u \\ y &= C(\theta)x + D(\theta)u \end{aligned}$$

respecte la performance quadratique $\mathcal{H}_\infty \gamma$ si et seulement si il existe une matrice X définie positive telle que

$$Y = \begin{pmatrix} A(\theta)^T X + X A(\theta) & X B(\theta) & C(\theta)^T \\ B(\theta)^T X & -\gamma I & D(\theta)^T \\ C(\theta) & D(\theta) & -\gamma I \end{pmatrix} < 0$$

Alors la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T X x$ garanti la stabilité globale et le gain entrées/sorties est borné par γ selon l'inégalité suivante :

$$\int_0^T y^T y d\tau \leq \gamma^2 \int_0^T u^T u d\tau \quad \forall T \geq 0$$

pour toutes les valeurs admissibles du vecteur de paramètres θ .

Remarque : La définition précédente considère une matrice X constante s'appliquant sur tout le domaine de variation de θ ; le niveau γ obtenu n'est donc pas la meilleure valeur possible du gain entrées/sorties du système : cette valeur peut par exemple être abaissée en utilisant une matrice X dépendant de θ comme présenté dans [GAC96].

La stabilité précédente doit être assurée pour toutes les valeurs du vecteur de paramètres θ soit une infinité de valeurs. Nous sommes donc confrontés à un nombre infini de contraintes. Pour éviter ce problème, il est possible d'utiliser un polytope convexe. Le problème aura alors un nombre fini de contraintes.

Dans ce cas il est facile de démontrer que les performances quadratiques sont assurées pour $(A(\theta), B(\theta), C(\theta), D(\theta))$ si et seulement si elles sont satisfaites pour chacun des sommets (A_i, B_i, C_i, D_i) . Nous pouvons donc en déduire le théorème suivant.

Théorème 3.3.1 *Pour un système LPV polytopique qui peut être écrit sous la forme d'état suivante :*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B(\theta)u \\ y &= C(\theta)x + D(\theta)u \\ \text{avec } \begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{P} &= C \left\{ \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, r \right\} \end{aligned}$$

les affirmations suivantes sont équivalentes :

- le système LPV est stable avec une performance quadratique $\mathcal{H}_\infty \gamma$
- il existe une matrice définie positive X telle que pour tous

$$\begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$$

l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\begin{pmatrix} A(\theta)^T X + X A(\theta) & X B(\theta) & C(\theta)^T \\ B(\theta)^T X & -\gamma I & D(\theta)^T \\ C(\theta) & D(\theta) & -\gamma I \end{pmatrix} < 0$$

- il existe une matrice définie positive X telle que pour $i = 1, \dots, r$

$$\begin{pmatrix} A_i^T X + X A_i & X B_i & C_i^T \\ B_i^T X & -\gamma I & D_i^T \\ C_i & D_i & -\gamma I \end{pmatrix} < 0$$

3.3.2 Solution du problème LPV et construction du contrôleur

Dans les parties précédentes, nous avons introduit les théorèmes qui sont nécessaires pour pouvoir calculer un contrôleur pour un système LPV. Par la suite est présentée la construction d'un contrôleur LPV capable de satisfaire la performance \mathcal{H}_∞ .

Nous supposons avoir un système LPV mis sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B_1(\theta)w + B_2(\theta)u \\ z &= C_1(\theta)x + D_{11}(\theta)w + D_{12}(\theta)u \\ y &= C_2(\theta)x + D_{21}(\theta)w + D_{22}(\theta)u \end{aligned}$$

où les signaux w, u, z, y ont la même signification que sur la figure 3.2 (pag. 14). Ce système est défini sur un polytope qui est conforme aux définitions précédentes. Nous pouvons donc décrire le système sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A(\theta) & B_1(\theta) & B_2(\theta) \\ C_1(\theta) & D_{11}(\theta) & D_{12}(\theta) \\ C_2(\theta) & D_{21}(\theta) & D_{22}(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{P} = C \left\{ \begin{pmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12i} \\ C_{2i} & D_{21i} & D_{22i} \end{pmatrix}, i = 1, \dots, r \right\}$$

A partir du système LPV précédent, le problème est donc de trouver un contrôleur qui ait la même structure et qui soit capable de garantir la performance quadratique \mathcal{H}_∞ pour le système en boucle fermée :

$$\begin{aligned} \dot{x}_K &= A_K(\theta)x_K + B_K(\theta)y \\ u &= C_K(\theta)x_K + D_K(\theta)y \end{aligned}$$

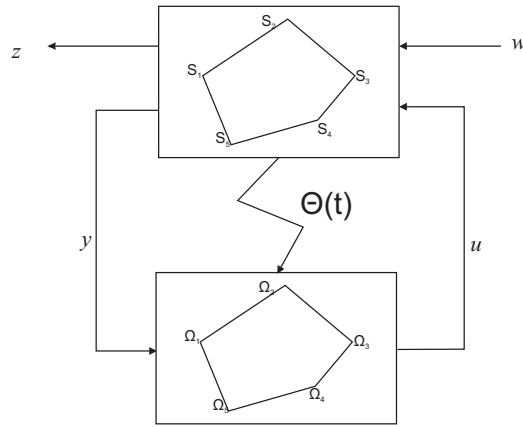


FIG. 3.7 – Structure générale

En utilisant les notations précédentes la représentation d'état du système en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cl} &= A_{cl}(\theta)x_{cl} + B_{cl}(\theta)w \\ z &= C_{cl}(\theta)x_{cl} + D_{cl}(\theta)w \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
A_{cl}(\theta) &= \begin{pmatrix} A(\theta) + B_2(\theta) D_K(\theta) C_2(\theta) & B_2(\theta) C_K(\theta) \\ B_K(\theta) C_2(\theta) & A_K(\theta) \end{pmatrix} \\
B_{cl}(\theta) &= \begin{pmatrix} B_1(\theta) + B_2(\theta) D_K(\theta) D_{21}(\theta) \\ B_K(\theta) D_{21}(\theta) \end{pmatrix} \\
C_{cl}(\theta) &= \begin{pmatrix} C_1(\theta) + D_{12}(\theta) D_K(\theta) C_2(\theta) & D_{12}(\theta) C_K(\theta) \end{pmatrix} \\
D_{cl}(\theta) &= D_{11}(\theta) + D_{12}(\theta) D_K(\theta) D_{21}(\theta)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Il est possible de rendre le problème plus simple en effectuant les simplifications suivantes :

- I. $D_{22}(\theta) = 0$ ce qui équivaut à $D_{22i} = 0$ pour $i = 1, \dots, r$
- II. les matrices $B_2(\theta), C_2(\theta), D_{12}(\theta), D_{21}(\theta)$ sont indépendantes du vecteur de paramètres θ
- III. $(A(\theta), B_2)$ est commandable pour toute valeur de θ
- IV. $(B(\theta), C_2)$ est observable pour toute valeur de θ

Remarque : la condition II est nécessaire pour que les matrices 3.14 soient affines en θ ; sinon on obtiendrait un problème avec un nombre infini de contraintes qui se révélerait difficilement à résoudre. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée il est possible de s'y ramener en utilisant des filtres passe-bas de grande bande passante, comme suggéré dans [AGB95]. Dans la suite de ce mémoire nous supposons que ces quatre hypothèses sont vérifiées, ce qui est le cas dans les applications que nous avons considérées.

Avant de continuer, il est intéressant de regarder la structure du contrôleur. Si le contrôleur LPV $\Omega(\theta)$ assure une performance quadratique γ , alors les contrôleurs Ω_i correspondant à chaque sommet du polytope doivent satisfaire le lemme borne réel. Si ce lemme est satisfait pour chacun des sommets alors le contrôleur LPV garantit la même performance sur l'intégralité du polytope.

Le contrôleur, pour un ensemble donné de paramètres, est obtenu par combinaison linéaire des contrôleurs dans les sommets. Il est donc possible de définir les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\theta &= \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i \omega_i \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \right\} \\
\begin{pmatrix} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^r \alpha_i \Omega_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i \begin{pmatrix} A_{Ki} & B_{Ki} \\ C_{Ki} & D_{Ki} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour résumer, il est possible d'introduire le théorème suivant.

Théorème 3.3.2 *Considérons le système LPV (comme celui de la figure 3.7) et les hypothèses I-IV (page 29). À partir d'une valeur γ positive les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

- *il existe un contrôleur LPV d'ordre k qui assure la performance \mathcal{H}_∞ quadratique γ*
- *il existe une matrice définie positive $X_{cl} \in \mathcal{R}^{(n+k) \times (n+k)}$ et des contrôleurs LTI*

$$\Omega_i = \begin{pmatrix} A_{Ki} & B_{Ki} \\ C_{Ki} & D_{Ki} \end{pmatrix}$$

telle que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{pmatrix} A_{cl}(\theta_i)^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl}(\theta_i) & X_{cl} B_{cl}(\theta_i) & C_{cl}(\theta_i)^T \\ B_{cl}(\theta_i)^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}(\theta_i)^T \\ C_{cl}(\theta_i) & D_{cl}(\theta_i) & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.15)$$

Le problème LPV revient alors en le calcul d'une seule matrice de Lyapunov X_{cl} et des contrôleurs Ω_i tels que (3.15) soit satisfaite. Comme dit dans [AGB95], la difficulté du problème est de trouver une matrice X_{cl} qui soit satisfaisante pour chacun des sommets du polytope. Les inégalités de (3.15) sont bilinéaires par rapport aux variables X_{cl} et aux matrices de la représentation d'état du contrôleur $A_K(\theta), B_K(\theta), C_K(\theta), D_K(\theta)$.

En utilisant des manipulations élémentaires il est possible d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 3.3.3 *Considérons un système LPV (comme celui de la figure 3.7) sous les hypothèses I-IV. Soient \mathcal{N}_R et \mathcal{N}_S des bases des noyaux de (B_2^T, D_{12}^T) et (C_2, D_{21}) respectivement. Alors il existe un contrôleur LPV garantissant la performance \mathcal{H}_∞ quadratique γ pour tous les paramètres du polytope :*

$$\Theta = \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i \omega_i \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \right\}$$

si et seulement si il existe deux matrices $(R, S) \in \mathcal{R}^{r \times r}$ satisfaisant les LMI suivantes :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_i R + R A_i^T & R C_{1i}^T & B_{1i} \\ C_{1i} R & -\gamma I & D_{11i} \\ B_{1i}^T & D_{11i}^T & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_i^T S + S A_i^T & S B_{1i} & C_{1i}^T \\ B_{1i}^T S & -\gamma I & D_{11i}^T \\ C_{1i} & D_{11i} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (3.17)$$

$$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} \geq 0 \quad (3.18)$$

Il est aussi possible de trouver un contrôleur LPV d'ordre k si et seulement si R et S satisfont aussi la condition suivante :

$$\text{rang}(I - RS) \leq k$$

Pour reconstruire le contrôleur, il est nécessaire d'abord de reconstruire la matrice X_{cl} à partir des matrices R et S . Pour cela il faut effectuer les deux étapes suivantes :

- calculer des matrices de rang plein $M, N \in \mathcal{R}^{r \times k}$ telles que

$$MN^T = I - RS$$

- la matrice X_{cl} peut être calculée comme l'unique solution de l'équation suivante :

$$\text{avec } \Pi_2 = \begin{pmatrix} S & I \\ N^T & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi_1 = \begin{pmatrix} I & R \\ 0 & M^T \end{pmatrix} \quad \Pi_2 = X_{cl} \Pi_1$$

Une fois que la solution X_{cl} est trouvée alors le choix des sommets du contrôleurs $\Omega_i = \begin{pmatrix} A_{Ki} & B_{Ki} \\ C_{Ki} & D_{Ki} \end{pmatrix}$ peut être fait de façon arbitraire. Toutes les solutions de l'inégalité suivante peuvent être satisfaisantes :

$$\begin{pmatrix} A_{cl}(\theta_i)^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl}(\theta_i) & X_{cl} B_{cl}(\theta_i) & C_{cl}(\theta_i)^T \\ B_{cl}(\theta_i)^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}(\theta_i)^T \\ C_{cl}(\theta_i) & D_{cl}(\theta_i) & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, r$$

3.3.3 Etude avec vitesse des paramètres limitée

Dans le paragraphe précédent la formulation du problème LPV a été introduite. Ce problème est approché sans aucune considération sur la vitesse de variation des paramètres. Le contrôleur qui est donc synthétisé est très conservatif : il peut accepter une variation infiniment rapide des paramètres. Ce choix n'est pas toujours raisonnable : la vitesse de variation des paramètres est dans la plupart des cas limitée. Le problème présenté maintenant est donc de rechercher un contrôleur qui soit capable de prendre en considération le fait que la vitesse de variation des paramètres est limitée.

Il est nécessaire de considérer, comme dans le cas précédent, un système mis sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B_1(\theta)w + B_2(\theta)u \\ z &= C_1(\theta)x + D_{11}(\theta)w + D_{12}(\theta)u \\ y &= C_2(\theta)x + D_{21}(\theta)w + D_{22}(\theta)u \end{aligned} \quad (3.19)$$

Les paramètres θ et leurs dérivées $\dot{\theta}$ sont bornés. Il est donc possible de définir les intervalles suivants :

$$\theta_i(t) \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i] \quad i = 1, \dots, l \quad (3.20)$$

$$\dot{\theta}_i(t) \in [\underline{\nu}_i, \bar{\nu}_i] \quad i = 1, \dots, l \quad (3.21)$$

L'équation (3.20) implique que le vecteur de paramètres θ est inclus dans l'hypercube Θ ; en partant de (3.21) il est possible de définir de la même façon l'hypercube $\Theta_d \in \mathcal{R}^l$. Le problème LPV consiste donc en la recherche d'un contrôleur qui soit capable de garantir la stabilité interne, et que le gain entre les perturbations w et le signal d'erreur z soit borné par une valeur γ pour toutes les valeurs de $(\theta, \dot{\theta})$:

$$\int_0^T z^T z d\tau \leq \gamma^2 \int_0^T w^T w d\tau \quad \forall T \geq 0$$

La structure du contrôleur est donc la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_K &= A_K(\theta, \dot{\theta})x_K + B_K(\theta, \dot{\theta})y \\ u &= C_K(\theta, \dot{\theta})x + D_K(\theta, \dot{\theta})y \end{aligned} \quad (3.22)$$

Comme dans le cas de variation illimitée des paramètres, il est nécessaire d'utiliser une extension du lemme borne réel pour pouvoir calculer le contrôleur : il est nécessaire de trouver une fonction de Lyapunov quadratique $V(x_{cl}, \theta) = x_{cl}^T P(\theta) x_{cl}$ qui soit dépendante des paramètres, où x_{cl} est le vecteur d'état en boucle fermée.

Une solution à ce problème est présentée dans [AA98]. Ici deux théorèmes sont introduits pour garantir la performance quadratique du contrôleur LPV.

Théorème 3.3.4 *Considérant un système LPV sous la forme de (3.19), avec une variation des paramètres et de leur vitesse bornée par (3.20) et (3.21). Il est possible de définir un contrôleur (3.22) qui garantit la stabilité interne et un gain en boucle fermée inférieur à γ , lorsqu'il existe des matrices X et Y symétriques dépendant des paramètres, et un quadruplet de matrices d'état $(\hat{A}_K, \hat{B}_K, \hat{C}_K, \hat{D}_K)$ tels que pour tous les couples $(\theta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Theta_d$ les deux LMI suivantes sont satisfaites ensemble :*

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + XA + \hat{B}_K C_2 + (*) & * & * & * \\ \hat{A}_K^T + A + B_2 D_K C_2 & -\dot{Y} + AY + B_2 \hat{C}_K + (*) & * & * \\ (XB_1 + \hat{B}_K D_{21})^T & (B_1 + B_2 D_K D_{21})^T & -\gamma I & * \\ C_1 + D_{12} D_K C_2 & C_1 Y + D_{12} \hat{C}_K & D_{11} + D_{12} D_K D_{21} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (3.24)$$

Une fois que les deux matrices X et Y sont obtenues, il est nécessaire de reconstruire le contrôleur. Pour ce faire il faut effectuer les deux étapes suivantes :

- trouver deux matrices N et M satisfaisant le problème de factorisation suivant

$$I - XY = NM^T$$

- calculer les matrices du contrôleur A_K , B_K et C_K :

$$A_K = N^{-1} [X\dot{Y} + N\dot{M}^T + \hat{A}_K - X(A - B_2 D_K C_2)Y - \quad (3.25)$$

$$- \hat{B}_K C_2 Y - X B_2 \hat{C}_K] M^{-T} \quad (3.26)$$

$$B_K = N^{-1} (\hat{B}_K - X B_2 D_K) \quad (3.27)$$

$$C_K = (\hat{C}_K - D_K C_2 Y) M^{-T} \quad (3.28)$$

Toutes les variables sont utilisées de façon linéaire dans les inégalités (3.23) et (3.24). Néanmoins le système est de dimension infinie vue sa dépendance en $(\theta, \dot{\theta})$ sur $\Theta \times \Theta_d$. Pour le résoudre il est donc nécessaire d'utiliser le théorème de projection de façon à avoir un problème dépendant seulement des matrices X et Y .

Théorème 3.3.5 *Considérons le système LPV (3.19) avec les paramètres et leurs variations bornés par (3.20) et (3.21). Alors il existe un contrôleur LPV sous la structure (3.22) garantissant la stabilité interne et un gain en boucle fermée inférieure à γ si il existe deux matrices symétriques $X(\theta)$ et $Y(\theta)$ dépendant des paramètres telles que pour toutes les couples $(\theta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Theta_d$ les deux LMI suivantes sont satisfaites ensemble :*

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_X & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc|c} \dot{X} + A^T X + X A & X B_1 & C_1^T \\ \hline B_1^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ \hline C_1 & D_{11} & \gamma I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_X & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_Y & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc|c} -\dot{Y} + A Y + Y A^T & T C_1^T & B_1 \\ \hline C_1 Y & -\gamma I & D_{11} \\ \hline B_1^T & D_{11}^T & \gamma I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_Y & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0$$

où \mathcal{N}_Y et \mathcal{N}_X sont des bases des noyaux de (B_2^T, D_{12}^T) et (C_2, D_{21})

Pour construire le contrôleur à partir du théorème précédent, on utilise le théorème suivant :

Théorème 3.3.6 *Supposons vérifiées les conditions du théorème précédent pour un couple de matrices X et Y et un niveau de performance γ . Le contrôleur LPV peut être construit pour tous les couples $(\theta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Theta_d$ en utilisant la structure suivante :*

- calculer D_K comme solution de

$$\sigma_{\max}(D_{11} + D_{12} D_K D_{21}) < \gamma$$

poser $D_{cl} = D_{11} + D_{12} D_K D_{21}$

- calculer \hat{B}_K et \hat{C}_K à partir des équations suivantes

$$\begin{bmatrix} 0 & D_{21} & 0 \\ D_{21}^T & -\gamma I & D_{cl}^T \\ 0 & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_K^T \\ * \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_2 \\ B_1^T X \\ C_1 + D_{12} D_K C_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & D_{12}^T & 0 \\ D_{12}^T & -\gamma I & D_{cl} \\ 0 & D_{cl}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}_K^T \\ * \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_2 \\ C_1 Y \\ B_1 + B_2 D_K D_{21} \end{bmatrix}$$

- calculer

$$\hat{A}_K = -(A + B_2 D_K C_2)^T + [X B_1 + \hat{B}_K D_{21} \quad (C_1 + D_{21} D_K C_2)^T] \begin{bmatrix} -\gamma I & D_{cl}^T \\ D_{cl} - \gamma I & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (B_1 + B_2 D_K D_{21})^T \\ C_1 Y + D_{12} \hat{C}_K \end{bmatrix}$$

- résoudre le problème de factorisation pour obtenir les matrices N et M

$$I - XY = NM^T$$

- calculer les matrices A_K, B_K, C_K, D_K du contrôleur en utilisant (3.25)- (3.27)

Le problème ainsi formulé reste de toute façon de solution difficile [AA98] puisque le problème présenté dans les théorèmes 3.3.4-3.3.6 reste de dimension infinie; c'est pour cette raison qu'il est intéressant de définir une relation entre les matrices X et Y et le vecteur des paramètres θ . Un exemple possible est le suivant :

$$\begin{aligned} X(\theta) &= X_0 + \sum_{i=1}^N \rho(\theta) X_i \\ Y(\theta) &= Y_0 + \sum_{i=1}^N \rho(\theta) Y_i \end{aligned}$$

Vu que le problème reste difficile à résoudre, une solution est proposée dans [AA98]. Elle consiste en l'utilisation d'un maillage sur le domaine des paramètres pour calculer la valeur optimale de γ ainsi que les matrices X et Y . Il est nécessaire par la suite de vérifier la solution obtenue sur un maillage plus fin. Un algorithme d'analyse possible est le suivant.

Algorithme 3.3.1

- I. définir un maillage \mathcal{G} sur l'ensemble Θ*
- II. minimiser γ par rapport aux contraintes LMI sur $\mathcal{G} \times \mathcal{T}$*
- III. contrôler sur un maillage plus fin les contraintes à satisfaire (3.23) et (3.24)*
- IV. si III n'est pas vérifié choisir un maillage \mathcal{G} plus fin et retourner à II*

Le maillage \mathcal{G} est calculé d'une façon classique tandis que celui sur la vitesse de variations des paramètres \mathcal{T} peut être calculé en utilisant seulement les bornes comme points de maillage.

3.4 Introduction à la robustesse - La valeur singulière structurée

Lorsqu'une modélisation est réalisée pour calculer une loi de commande, des approximations sont toujours faites. Parfois la modélisation est effectuée en partant de certaines hypothèses, comme par exemple la charge d'un véhicule ou son empattement. Sur ce modèle nominal, il est alors possible de calculer un contrôleur qui rend stable le système en boucle fermée. Malheureusement la stabilité du système en boucle fermée n'est pas garantie lorsque le modèle à asservir n'est pas le modèle nominal. Il est donc intéressant de pouvoir analyser la robustesse de la loi nominale par rapport aux variations du modèle.

3.4.1 Mise en forme LFT

Lorsque l'analyse est conduite dans un cadre linéaire, il est possible de classer les incertitudes dans deux sous-ensembles différents. D'un côté il y a les incertitudes paramétriques qui sont affectées par la valeur d'un ou plusieurs paramètres, dans le cas d'un véhicule la masse

peut être, par exemple, une incertitude de ce type. En face il y a les incertitudes liées aux dynamiques mal connues ou volontairement négligées, celles-ci sont d'habitude constituées d'une ou plusieurs fonctions de transfert inconnues.

Supposons un modèle nominal $G(s)$ (Figure 3.8) mis sous la forme suivante :

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) & G_{33}(s) \end{bmatrix}$$

Il est possible de définir la formulation du système en boucle fermée avec les incertitudes en utilisant une représentation LFT comme présenté dans l'équation suivante :

$$\begin{aligned} z &= \mathcal{F}_u(\mathcal{F}_l(G, K), \Delta) w \\ &= \mathcal{F}_l(\mathcal{F}_u(G, \Delta), K) w \end{aligned} \quad (3.29)$$

où $\mathcal{F}_l(G, K)$ est définie par 3.5 (page 15), et $\mathcal{F}_u(G, \Delta)$ est donnée par :

$$\mathcal{F}_u(G(s), \Delta) = G_{22} + G_{21}\Delta(I - G_{11}\Delta)^{-1}G_{12}$$

Maintenant, il est intéressant de souligner qu'il est possible de considérer le modèle nominal en boucle fermée comme un système à lui tout seul en utilisant l'équation suivante.

$$M(s) = \mathcal{F}_l(G(s), K(s)) = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Dans ce cas il est possible de construire le modèle avec les incertitudes en utilisant la structure de la figure 3.9. La relation entre les entrées et les sorties est donc définie par l'équation suivante :

$$z = \mathcal{F}_u(M, \Delta) w = [M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}] w$$

Après avoir introduit la structure de la boucle fermée en présence d'incertitudes, il est possible d'introduire le concept de stabilité de cette boucle. Considérant un contrôleur $K(s)$ qui est stabilisant pour le modèle nominal $G(s)$ alors nous pouvons constater que $M(s) \in \mathbf{RH}_\infty$. En utilisant le théorème du petit gain, il est possible d'affirmer que le système est robustement stable pour toutes les incertitudes $\Delta(s) \in \mathbf{RH}_\infty$ telle que $\|\Delta\|_\infty < 1$ si et seulement si $\mathcal{F}_u(M, \Delta) \in \mathbf{RH}_\infty$ pour tout Δ , ce qui est garanti par la condition $\|M_{11}\|_\infty \leq 1$.

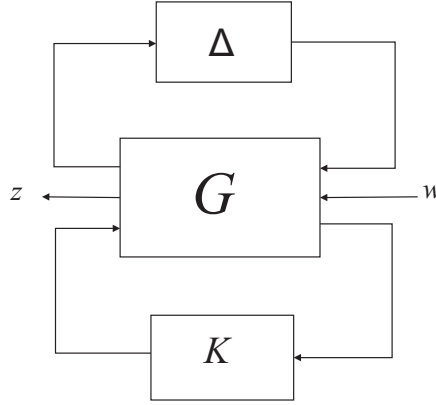


FIG. 3.8 – Structure générale

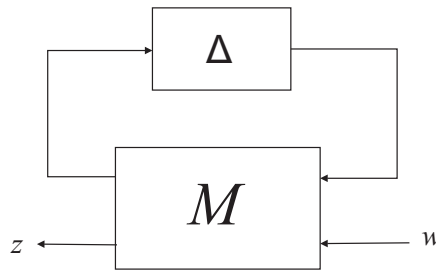


FIG. 3.9 – Structure d'analyse

3.4.2 L'incertitude et sa structure

Les incertitudes qu'un système peut présenter sont de différentes natures. Il est donc possible de définir une matrice $\Delta(s)$ les contenant toutes. Cette matrice peut être mise sous la forme générale suivante :

$$\Delta(s) = \text{diag} \{ \Delta_1(s), \dots, \Delta_q(s), \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}, \varepsilon_1 I_{c_1}, \dots, \varepsilon_c I_{c_c} \} \quad (3.31)$$

$$\Delta_i \in \mathbf{RH}_\infty \quad \delta_i \in \mathbf{R} \quad \varepsilon_i \in \mathbf{C}$$

La matrice d'incertitude précédente est supposée respecter les conditions de normalisation :

$$(\|\Delta_i(s)\|_\infty < 1 \quad \delta_i \in]-1; +1[\quad |\varepsilon_i| < 1) \iff (\|\Delta(s)\|_\infty < 1)$$

La matrice d'incertitudes $\Delta(s)$ est donc composée de matrices de transfert stables de structure quelconque $\Delta_i(s)$, de scalaire réels répétés δ_i et de scalaires complexes ε_i .

Lorsque la structure de la matrice d'incertitudes est définie, il existe deux possibilités pour aborder le problème de la robustesse :

- Analyser la robustesse sans considérer la structure de la matrice $\Delta(s)$. Dans ce cas, l'analyse de robustesse doit être conduite en utilisant le théorème du petit gain. Cette étude s'avère parfois trop contraignante.

- Considérer la structure de la matrice $\Delta(s)$. Ce choix conduit à l'utilisation de la valeur singulière structurée qui fournit des résultats meilleurs que ceux obtenus avec le théorème du petit gain.

3.4.3 La valeur singulière structurée

La valeur singulière structurée n'est rien d'autre qu'une généralisation de la valeur singulière d'une matrice constante. Pour introduire ce concept, nous utilisons l'approche présentée dans [ZDG94]. Considérons le système en boucle fermée de la figure 3.10 où $M(s)$ et $\Delta(s)$ sont stables.

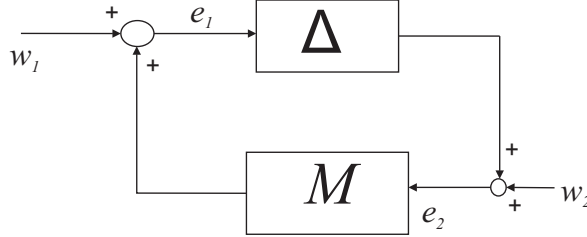


FIG. 3.10 – *Structure d'analyse*

La question de la robustesse de la stabilité est de connaître la valeur maximale de la norme \mathcal{H}_∞ telle que le système est stable pour tout $\Delta(s)$ de norme inférieure à cette valeur. Vue la structure de la boucle, le système sera instable si l'équation $\det(I - M(s)\Delta(s)) = 0$ a des racines dans $\overline{\mathbf{C}}_+$. Il est maintenant possible de considérer une valeur $\alpha > 0$ telle que le système en boucle fermée soit stable pour tout $\Delta(s)$ tel que $\|\Delta\|_\infty < \alpha$. Il est par la suite intéressant d'incrémenter α jusqu'à α_{max} . La valeur α_{max} sera donc la marge robuste de stabilité.

Précédemment nous avons souligné que la matrice d'incertitudes peut être structurée ou non structurée. Lorsque $\Delta(s)$ n'est pas structurée, le théorème du petit gain fournit le résultat suivant :

$$\frac{1}{\alpha_{max}} = \|M\|_\infty = \sup_{s \in \overline{\mathbf{C}}_+} \overline{\sigma}(M(s)) = \sup_{\omega} \overline{\sigma}(M(j\omega))$$

et il est possible d'écrire :

$$\overline{\sigma}(M(s)) = \frac{1}{\min \{ \overline{\sigma}(\Delta) : \det(I - M(s)\Delta) = 0, \Delta \text{ non structurée} \}}$$

Le problème consiste donc en la recherche de l'inverse de la plus grande valeur singulière du système $M(s)$. Cette valeur fournit l'information sur la plus petite matrice non structurée $\Delta(s)$ qui cause l'instabilité du système en boucle fermée.

Avec le même principe, il est possible de déterminer la plus petite matrice structurée $\Delta(s)$ qui déstabilise le système en boucle fermée. Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire une

généralisation de la valeur singulière, qui jusqu'à maintenant était capable de fournir cette information. La valeur singulière structurée μ est donc introduite :

$$\mu_{\Delta}(M(s)) = \frac{1}{\min \{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M(s)\Delta) = 0, \Delta \text{ structurée} \}}$$

La marge de stabilité pour un système en boucle fermée avec incertitudes structurées est ainsi exprimée par l'équation suivante :

$$\frac{1}{\alpha_{max}} = \sup_{s \in \bar{\mathbf{C}}_+} \mu_{\Delta}(M(s)) = \sup_{\omega} \mu_{\Delta}(M(j\omega))$$

Il est donc possible de donner la définition suivante pour la valeur singulière structurée.

Définition 3.4.1 *Pour une matrice de transfert complexe $M(s)$ et pour une matrice d'incertitudes $\Delta(s)$ qui est sous la forme (3.31) normalisée, la fonction réelle non négative μ , appelée la valeur singulière structurée, est définie par :*

$$\mu_{\Delta}(M(s)) = \frac{1}{\min \{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M(s)\Delta) = 0\}}$$

Si aucune matrice d'incertitudes Δ ne rend $I - M(s)\Delta$ singulière, alors $\mu_{\Delta}(M(s)) = 0$

La valeur singulière structurée présente les propriétés suivantes :

- I. $\mu(\alpha M) = |\alpha| \mu(M) \forall \Delta, \forall \alpha \in \mathbf{C}, \forall M \in \mathbf{C}^{k \times k}$
- II. pour un scalaire réel répété $\Delta = \delta I : \mu_{\Delta}(M) = \rho_R(M) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} (|\lambda| : \det(\lambda I_k - M) = 0)$
- III. pour un bloc complexe $\Delta \in \mathbf{C}^{k \times k} : \mu_{\Delta}(M) = \bar{\sigma}(M)$
- IV. pour toutes structures de $\Delta(s)$ la valeur de μ est encadrée par

$$\rho_{\mathbf{R}}(M) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \bar{\sigma}(M)$$

où $\rho_{\mathbf{R}}(M)$ est le rayon spectrale réel

- V. Soit un ensemble \mathcal{D} de matrice D qui commutent avec Δ ($D\Delta = \Delta D$) alors l'inégalité suivante est vérifiée

$$\mu_{\Delta}(M) \leq \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DM D^{-1})$$

Lors de l'analyse par valeur singulière structurée, il est possible de définir l'ensemble \mathbf{D} des matrices hermitiennes définies positives qui commutent avec toutes les matrices d'incertitudes Δ de type 3.21 : un deuxième ensemble \mathbf{G} contient des matrices hermitiennes dont les éléments non nul correspondent aux bloc réels de Δ :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \left\{ \text{diag} \left\{ d_1 I_{q_1}, \dots, d_q I_{q_q}, D_1, \dots, D_r, D'_1, \dots, D'_c \right\}, d_i > 0, D_i = D_i^* > 0, D'_i = D_i'^* > 0 \right\} \\ \mathbf{G} &= \left\{ \text{diag} \left\{ 0_{q_1 \times q_1}, \dots, 0_{q_q \times q_q}, G_1, \dots, G_r, 0_{c_1 \times c_1}, \dots, 0_{c_c \times c_c} \right\}, G_i = G_i^* \right\} \end{aligned}$$

La propriété suivante a pour but d'introduire la recherche d'une borne supérieure de $\mu_\Delta(M)$. Pour ce faire, il est possible de résoudre un problème d'optimisation qui aura la structure suivante :

$$\begin{aligned} \mu_\Delta(M(s)) &\leq \alpha^* \\ \alpha^* &= \min_{D \in \mathbf{D}} \alpha \text{ sous les contraintes } \begin{cases} \alpha \geq 0 \\ M^*DM - \alpha^2 D \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'optimisation précédente ne fait pas la distinction entre les incertitudes réelles ou complexes. Pour obtenir des résultats meilleurs, il est possible d'envisager un usage conjoint des ensembles \mathbf{D} et \mathbf{G} . La recherche d'une borne supérieure passe alors pour la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \mu_\Delta &\leq \beta^* \\ \beta^* &= \min_{D \in \mathbf{D}, G \in \mathbf{G}} \beta \\ \text{sous les contraintes } &\begin{cases} \beta \geq 0 \\ M^*DM + j(GM - M^*G) - \beta^2 D \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il est possible, pour conclure, de déduire le théorème suivant ([ZDG94]) qui fournit le principe d'analyse de robustesse utilisant la valeur singulière structurée.

Théorème 3.4.1 *Soit une valeur $\beta > 0$. Le système de la figure 3.10 est stable pour toute incertitudes structure $\Delta(s)$ telle que $\|\Delta(s)\|_\infty < \beta$ si et seulement si :*

$$\sup_{\omega \in \mathbf{R}} \mu_\Delta(M(j\omega)) \leq \beta^{-1}$$

3.5 Utilisation de ces outils dans le contexte de la thèse

Les outils théoriques que nous venons de présenter sont connus depuis plusieurs années et plusieurs algorithmes de calcul ont été introduits pour pouvoir les utiliser. Au cours de cette thèse nous avons utilisé ces algorithmes, principalement les algorithmes de résolution des LMI. Notre apport se situe sur un autre plan, à savoir comment poser correctement le problème pour le résoudre par ces outils et comment utiliser le correcteur obtenu.

Chapitre 4

Modélisation de la dynamique du véhicule

4.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la présentation d'une modélisation pour un véhicule routier en vue du développement de lois de commande. Seules les lois permettant d'asservir la dynamique du véhicule sont abordées. En particulier, les lois de contrôle moteur n'en font pas l'objet.

Tous les coefficients qui sont introduits dans les équations de ce chapitre ont été obtenus à partir des informations fournies par le constructeur. Dans certains cas, comme par exemple le ressort d'une suspension, nous avons obtenu le coefficient pour le modèle linéaire en considérant la tangente à l'origine de la caractéristique. Ces modèles ont été validés par comparaison avec les résultats fournis par des simulateurs non linéaires du véhicule.

4.2 Véhicule avec suspensions

Dans la littérature, il est possible de trouver différentes modélisations du véhicule. Certaines considèrent le véhicule comme un corps rigide et d'autres considèrent le véhicule comme un corps rigide sur des suspensions. Vus les développements effectués par la suite, le véhicule est considéré comme un corps rigide équipé de suspensions. Cependant une modélisation rigide du véhicule peut être intéressante dans certaines situations.

Considérer le véhicule équipé de suspensions permet de prendre en considération les six degrés de liberté qui lui sont normalement associés et donc les mouvements de roulis et de tangage qui sont négligés lors d'une modélisation du véhicule comme un corps rigide.

4.3 Définition des repères

La modélisation d'un véhicule avec suspension reste un problème complexe qui a été exploré par plusieurs auteurs [KN05],[Pha90] et [Gen00]. Ils ont démontré qu'une modélisation à 6 degrés de liberté est nécessaire pour décrire la dynamique d'un véhicule de façon complète. Le mouvement du véhicule peut tout d'abord être décomposé sur un repère orthonormal comme la combinaison d'un déplacement latéral d'un déplacement longitudinal et d'un déplacement vertical associés aux mouvements de rotations. Les mouvements de rotation sont constitués du mouvement de roulis, du mouvement de tangage et du mouvement de lacet.

L'approche retenue ici est inspirée des travaux [Gen00] : la masse est partagée en masse suspendue et masse non suspendue. La masse suspendue est soumise aux degrés de liberté précédents, tandis que la masse non suspendue sera soumise seulement au mouvement de roulis et au déplacement vertical. Le choix de cette approche est dicté par volonté de simplifier la lecture du modèle par une personne qui ne soit pas trop proche de la mécanique du véhicule.

En observant le comportement du véhicule on constate que nous nous trouvons en présence d'un système en roto-translation. Un rapide rappel des changements de repères et de leurs lois de passage est nécessaire pour la suite.

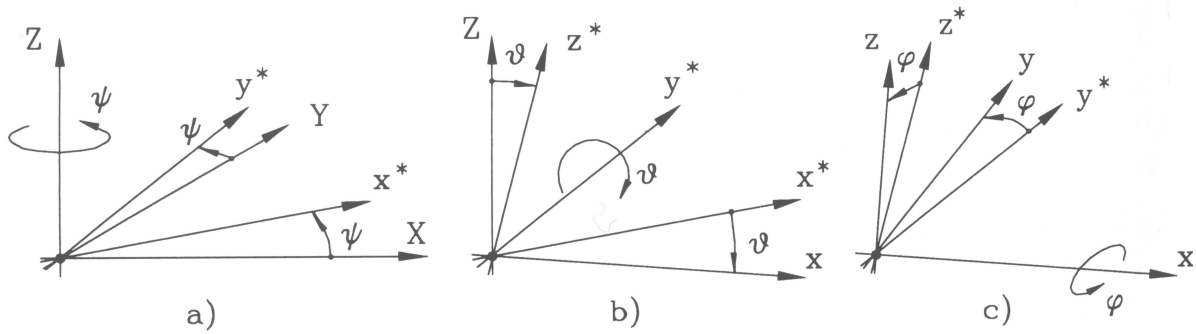


FIG. 4.1 – Définition des repères [Gen00]

Soit un repère galiléen XYZ dans lequel le plan XY correspond au plan de la route. Il est maintenant possible introduire les rotations par rapport aux différents axes du repère galiléen. On considère une première rotation du repère XYZ par rapport à l'axe Z selon l'angle de lacet ψ (Figure 4.1). Un nouveau repère x^*y^*Z est donc obtenu. Le passage entre le repère x^*y^*Z et le repère XYZ, s'obtient par la matrice de rotation R_1 :

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On doit introduire deux rotations : celle de tangage et celle de roulis. Nous considérons d'abord la rotation liée au tangage. Elle peut être exprimée en utilisant une rotation du repère

x^*y^*Z par rapport à l'axe y^* d'angle θ . Le système passera donc du repère x^*y^*Z au repère xy^*z^* , avec la matrice de rotation R_2 :

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

La dernière rotation qu'on doit considérer est celle liée à l'angle de roulis. La rotation est faite par rapport à l'axe x , et permet de passer du repère xy^*z^* au repère xyz . La matrice de passage correspondante R_3 entre le repère xyz et le repère xy^*z^* est la suivante :

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Le passage du repère galiléen XYZ au repère véhicule xyz s'obtient donc grâce à la matrice $R = R_1 R_2 R_3$. Celle-ci s'écrit en détails :

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) & \cos(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) - \sin(\psi) \cos(\phi) & \cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) - \sin(\psi) \sin(\phi) \\ \sin(\psi) \cos(\theta) & \sin(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) + \cos(\psi) \cos(\phi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) - \cos(\psi) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\theta) \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Pour rendre plus facile la notation des équations qui suivent, il est nécessaire d'introduire la matrice de rotation bidimensionnelle R_1^* , pour la rotation de lacet sur le plan XY :

$$R_1^* = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

Ce qui permet d'obtenir une nouvelle formulation de la matrice R :

$$R = \begin{bmatrix} R_1^* R_{11} & R_1^* R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

où

$$R_2 R_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} \cos(\theta) & \sin(\theta) \sin(\phi) & \sin(\theta) \cos(\phi) & \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) & \\ \hline -\sin(\theta) & \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\theta) \cos(\phi) & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} R_{11} & R_{12} \\ \hline R_{21} & R_{22} \end{array} \right]$$

En analysant les rotations appliquées, on s'aperçoit que les rotations du véhicule ne sont pas orientées dans les directions du repère xyz , mais dans les direction x , y^* et Z . Pour obtenir les vitesses par rapport au repère xyz , on peut utiliser la transformation suivante pour avoir leur expression dans le repère véhicule.

$$\begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + R_3^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + [R_2 R_3]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}$$

En développant l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{cases} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta) \\ q &= \dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\theta) \\ r &= \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\phi) \end{cases}$$

Si les angles de tangage et de roulis sont suffisamment petits pour pouvoir utiliser l'approximation des petits angles, il est possible d'exprimer les sous-matrices selon les formulations suivantes :

$$\begin{aligned} R_{11} &= I & R_{12} &= \begin{Bmatrix} \theta \\ -\phi \end{Bmatrix} \\ R_{21} &= -R_{12}^T = \begin{bmatrix} -\theta & \phi \end{bmatrix} & R_{22} &= I \end{aligned}$$

L'approximation conduit au système suivant :

$$\begin{cases} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi}\theta \\ q &= \dot{\theta} + \phi\dot{\psi} \\ r &= \dot{\psi} - \phi\dot{\theta} \end{cases}$$

4.4 Modélisation pour les véhicules isolés

Un véhicule est normalement constitué d'une masse suspendue et de n roues. Il peut donc être modélisé comme un système avec $6 + n$ degrés de liberté. Le choix des degrés de liberté est une première problématique à résoudre. Pour la masse suspendue, on peut choisir comme coordonnées généralisées les coordonnées X , Y et Z du barycentre et les angles de rotation du véhicule (θ, ϕ, ψ) . Les degrés de liberté des suspensions sont par contre liés au type de suspensions choisies, comme spécifié par la suite.

L'obtention des équations est basée sur une approche lagrangienne. Il est donc nécessaire d'introduire l'énergie cinétique de la masse suspendue. Celle ci peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} m_s (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \\ &+ \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta) \\ \dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\phi) \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta) \\ \dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\phi) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Pour les masses non suspendues, il n'est pas possible de définir une expression explicite comme dans le cas précédent. Il est par contre toujours possible de trouver une expression de l'énergie cinétique générale sous la forme :

$$\mathcal{T}_i = f(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \gamma_i, \dot{\gamma}_i)$$

Dans ce cas γ_i est la coordonnée généralisée utilisée pour la suspension i .

Vu que nous utilisons l'approche lagrangienne, il est aussi nécessaire de définir l'énergie gravitationnelle du véhicule; celle-ci peut être calculée à partir des positions des barycentres de tous les corps rigides. Son expression est donc la suivante :

$$\mathcal{U}_g = m_s g Z + \sum_{\forall i} m_i g Z_i$$

Pour poursuivre l'écriture de l'équation de Lagrange, il est nécessaire d'introduire aussi l'énergie potentielle. Nous introduisons d'abord celle des suspensions. Vu qu'a priori il n'y a pas d'informations sur la structure des trains et donc d'information sur la position des suspensions, il est possible de fournir seulement une équation générale du problème. L'énergie associée à la i -ème suspension est de la forme suivante :

$$\mathcal{U}_{m_i} = f(Z, \theta, \phi, \gamma_i)$$

Le même discours est valable pour le pneumatique. Son énergie potentielle sera exprimée selon l'équation suivante :

$$\mathcal{U}_{p_i} = f(Z, \theta, \phi, \gamma_i)$$

Sur un véhicule il est possible d'identifier aussi des amortisseurs. Lorsque le véhicule en est équipé, il est possible de définir une force dissipative de Rayleigh qui pour l'amortisseur i peut être défini sous la forme suivante :

$$\mathcal{F}_{a_i} = f(\dot{X}, \dot{Y}, Z, \dot{Z}, \theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}, \gamma_i, \dot{\gamma}_i)$$

Une fois que toutes les forces dissipatives et les énergies sont écrites, il est possible de formuler l'équation de Lagrange qui fournit les équations différentielles du problème :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = \mathcal{Q}_i$$

où \mathcal{T} est l'énergie cinétique, \mathcal{U} est l'énergie potentielle, \mathcal{F} est la force de Rayleigh, \mathcal{Q}_i sont les forces externes appliquées au véhicule et q_i est le degré de liberté à analyser.

Le choix d'utiliser la modélisation selon l'équation de Lagrange peut paraître très lourd, mais permet une modularité que des approches plus classiques ne permettent pas.

4.5 Modélisation linéaire pour les véhicules isolés

Dans le paragraphe 4.4 une description très générale du véhicule a été fournie. L'application à la modélisation d'un véhicule routier est maintenant réalisée en partant de l'analyse des différentes parties du véhicule : la masse suspendue, les suspensions et les pneumatiques.

4.5.1 Modèle de la masse suspendue

Nous considérons d'abord la masse suspendue. Lors de l'analyse il est nécessaire d'introduire dans un premier temps un repère pour la masse suspendue. Le plus simple peut être celui identifié comme x_s, y_s, z_s (Figure 4.2). Ce repère est choisi de façon à avoir l'axe x_s parallèle à l'axe de roulis x ; il en résulte que l'axe z_s appartiendra au plan de symétrie du véhicule.

Le fait d'avoir choisi un repère pour la masse suspendue qui est différent du repère du véhicule permet de constater qu'il y a une différence entre le centre de gravité du véhicule et le centre de gravité de la masse suspendue. Cette constatation est très utile dans la suite lors de l'analyse du roulis.

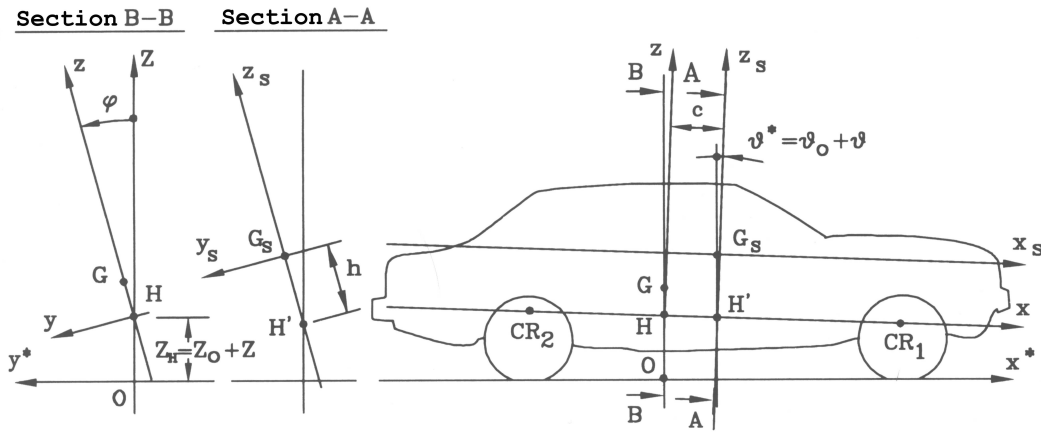


FIG. 4.2 – Axes du véhicule [Gen00]

Une fois définis les repères, on peut définir les équations de la masse suspendue. Tout sera développé à partir du point H (intersection de l'axe de roulis avec l'axe vertical passant par G). Les coordonnées du point H sont $(X_H, Y_H, Z_H) = (X, Y, Z_0 + Z)$. Avec les hypothèses faites, il est évident que le véhicule aura un angle de tangage non nul au repos θ_0 (Figure 4.2). En partant de cette considération, nous pouvons obtenir l'expression suivante pour l'angle de tangage :

$$\theta^* = \theta_0 + \theta$$

D'après la Figure 4.2, les coordonnées du centre de gravité de la masse suspendue par rapport au repère (x, y, z) sont $(c, 0, h)$ ses coordonnées dans le repère galiléen sont donc :

$$q \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{G_s} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z_0 + Z \end{Bmatrix} + R \begin{Bmatrix} c \\ 0 \\ h \end{Bmatrix}$$

Les vitesses s'en déduisent par simple dérivation :

$$\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix}_{G_s} = \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \dot{R}_1^* \left(R_{11} \begin{Bmatrix} c \\ 0 \end{Bmatrix} + R_{12} h \right) + R_1^* \left(\dot{R}_{11} \begin{Bmatrix} c \\ 0 \end{Bmatrix} + \dot{R}_{12} h \right)$$

$$\dot{Z}_{Gs} = \dot{Z} + \dot{R}_{21} \begin{Bmatrix} c \\ 0 \end{Bmatrix} + \dot{R}_{22} h$$

Les équations précédentes permettent de calculer les équations pour l'énergie cinétique; pour rendre plus lisible ce mémoire l'équation relative au pompage sera analysée séparément. Nous commencerons par l'analyse des équations de la vitesse longitudinale et de la vitesse latérale :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix}_{Gs} &= \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \dot{R}_1^* \left(\begin{bmatrix} \cos(\theta^*) & \sin(\theta^*) \sin(\phi) \\ 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin(\theta^*) \cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \end{bmatrix} h \right) + \\ &+ \dot{R}_1^* \left(\begin{bmatrix} -\dot{\theta}^* \sin(\theta) & \dot{\theta}^* \cos(\theta^*) \sin(\phi) + \dot{\phi} \cos(\phi) \sin(\theta^*) \\ 0 & -\dot{\phi} \sin(\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ 0 \end{Bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \dot{\theta}^* \cos(\theta) \sin(\phi) - \dot{\phi} \sin(\phi) \cos(\theta) \\ -\dot{\phi} \cos(\phi) \end{bmatrix} h \right) = \\ &= \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \dot{R}_1^* \left(\begin{bmatrix} c \cos(\theta^*) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin(\theta^*) \cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \end{bmatrix} h \right) + \\ &+ \dot{R}_1^* \left(\begin{bmatrix} -c\dot{\theta}^* \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}^* \cos(\theta) \sin(\phi) - \dot{\phi} \sin(\phi) \cos(\theta) \\ -\dot{\phi} \cos(\phi) \end{bmatrix} h \right) \end{aligned}$$

En introduisant l'approximation des petits angles, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix}_{Gs} = \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \dot{R}_1^* \begin{bmatrix} c + h(\theta_0 + \theta) \\ -h\phi \end{bmatrix} + \dot{R}_1^* \begin{bmatrix} h\dot{\theta} \\ -h\dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Nous avons donc vu les équations relatives à la dynamique latérale et à la dynamique longitudinale, nous pouvons maintenant nous intéresser à l'équation du pompage. Nous devons partir de l'équation du déplacement, une fois que nous avons cette équation nous pouvons la dériver et obtenir l'équation de la vitesse qui nous permet de construire la modélisation selon l'approche de Lagrange.

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{Gs} &= \dot{Z} + \dot{R}_{21} c + \dot{R}_{22} h = \\ &= \dot{Z} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta}^* \cos(\theta^*) & -\dot{\theta}^* \sin(\theta) \sin(\phi) + \dot{\phi} \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ 0 \end{Bmatrix} - \\ &\quad - (\dot{\theta}^* \sin(\theta) \cos(\phi) + \dot{\phi} \sin(\phi) \cos(\theta)) \end{aligned}$$

En réalisant aussi sur cette équation l'approximation des petits angles, la vitesse de pompage est exprimée par l'équation suivante :

$$\dot{Z}_{Gs} = \dot{Z} - c\dot{\theta} \quad (4.3)$$

Les trois vitesses de translation et les trois de rotation permettent de déterminer l'énergie cinétique de la masse suspendue.

$$\mathcal{T}_S = \frac{1}{2} m_S \left(\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix}_{Gs}^T \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix}_{Gs} + \dot{Z}_{Gs}^2 \right) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix} \begin{bmatrix} J_{XS} & 0 & -J_{XZS} \\ 0 & J_{YS} & 0 \\ -J_{XZS} & 0 & J_{ZS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

En remplaçant les équations (4.2) et (4.3) dans l'équation (4.4), on obtient l'énergie cinétique de la masse suspendue. Nous nous permettons de rappeler au lecteur que les équations sont

faites avec l'approximation des petits angles et que donc nous avons remplacé les sin et les cos par leurs développements limités au premier ordre :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_S = \frac{1}{2}m_S \Big[& \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + c^2\dot{\psi}^2 + h^2\dot{\phi}^2 + (c^2 + h^2)\dot{\theta}^2 - 2ch\dot{\psi}\dot{\phi} - 2c\dot{Z}\dot{\theta} + \\ & + 2h \left\{ \begin{matrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{matrix} \right\}^T R_1^* \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\phi} \end{matrix} \right\} + 2\dot{\psi} \left\{ \begin{matrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{matrix} \right\}^T \frac{\partial}{\partial \psi} R_1^* \left\{ \begin{matrix} c + h(\theta_0 + \theta) \\ -h\phi \end{matrix} \right\} \Big] + \\ & + \frac{1}{2} \left(J_{XS}\dot{\phi}^2 + J_{YS}\dot{\theta}^2 + J_{ZS}\dot{\psi}^2 \right) - J_{xz_s}\dot{\phi}\dot{\psi} \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.5.2 Analyse d'une suspension

Dans 4.5.1 les équations de l'énergie cinétique de la masse suspendue ont été introduites. La même chose peut être réalisée pour les suspensions. Il est possible d'identifier deux différents types de trains : le premier est rigide tandis que le deuxième est à roues indépendantes. Le cas sans doute le plus général est celui du train à roues indépendantes, le train rigide pouvant être considéré comme un cas particulier. C'est pour cette raison qu'ici nous avons décidé d'introduire d'abord les équations de l'essieu à roues indépendantes et de fournir par la suite quelques indications sur la manière d'obtenir les équations pour l'essieu rigide.

Le train que nous utilisons pour effectuer les calculs est celui de la figure 4.3. Ici les masses non suspendues sont supposées concentrées sur les bras des essieux. Il est donc possible de localiser deux centres de gravité, un pour chacun des deux bras de l'essieu.

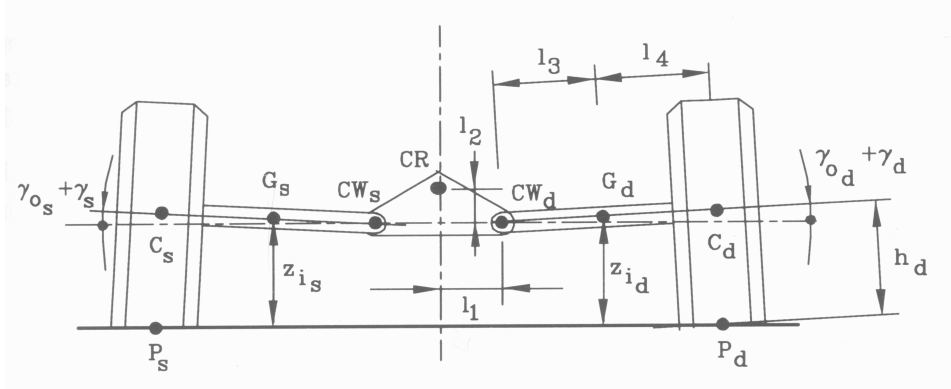


FIG. 4.3 – Modèle de l'essieu [Gen00]

En utilisant cette figure nous pouvons définir les différentes grandeurs fondamentales qui seront utilisées dans la suite :

- G_d et G_s sont les centres de gravité du bras droit et du bras gauche des suspensions du train
- Z_{i_d} et Z_{i_s} sont les hauteurs de ces deux centres de gravité
- C_d et C_s sont les centres de rotation des roues
- γ_{0_d} et γ_{0_s} sont les angles de carrossage au repos des roues droite et gauche

– γ_d et γ_s sont les angles de carrossage des roues droite et gauche.

Les coordonnées du centre de gravité du bras gauche sont alors :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{G_{is}} = \begin{Bmatrix} x_i \\ (l_1 + l_3) \\ -l_2 + l_3 (\gamma_{0is} + \gamma_{is}) \end{Bmatrix}$$

Il est possible d'obtenir la même équation pour le bras droit :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{G_{sd}} = \begin{Bmatrix} x_i \\ -(l_1 + l_3) \\ -l_2 - l_3 (\gamma_{0id} + \gamma_{id}) \end{Bmatrix}$$

Souvent il est possible de trouver les équations exprimées en utilisant l'angle de carrossage γ comme coordonnée généralisée. Par contre nous avons décidé d'exprimer les positions des bras en fonction de leurs coordonnées barycentriques Z_{is} et Z_{id} ou éventuellement de leur somme et/ou leur différence. C'est-à-dire qu'il est possible d'exprimer les coordonnées des centres de gravité de chacun des bras en fonction de la coordonnée du barycentre de l'essieu et de l'angle de roulis du même essieu :

$$\begin{cases} Z_{i0} + Z_i = \frac{Z_{is} + Z_{id}}{2} \\ \phi_i = \frac{Z_{id} - Z_{is}}{d_0} \end{cases}$$

La variable Z_i correspond à la coordonnée du barycentre de l'essieu. La distance d_0 représente la distance entre les deux centres de gravité au repos selon l'axe y. Maintenant il est possible de formuler les expressions des coordonnées Z des barycentres :

$$\begin{cases} Z_{G_{is}} = Z_0 + Z - (\theta_0 + \theta) x_i + \phi_i (l_1 + l_3) - l_2 + l_3 (\gamma_{0is} + \gamma_{is}) \\ Z_{G_{id}} = Z_0 + Z - (\theta_0 + \theta) x_i - \phi_i (l_1 + l_3) - l_2 - l_3 (\gamma_{0id} + \gamma_{id}) \end{cases}$$

Si le système est en position d'équilibre, les angles de carrossage sont égaux et il n'y a pas de tangage; les équations pour les deux centres de gravité sont exprimées de la façon suivante :

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}_{G_{is}} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} + R_1^* \begin{Bmatrix} x_i - \theta_0 l_2 - \theta l_2 \\ l_2 \phi + \frac{d_0}{2} \end{Bmatrix} \\ Z_{G_{is}} = Z_{i0} + Z_i + \frac{d_0}{2} \phi_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}_{G_{id}} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} + R_1^* \begin{Bmatrix} x_i - \theta_0 l_2 - \theta l_2 \\ l_2 \phi - \frac{d_0}{2} \end{Bmatrix} \\ Z_{G_{id}} = Z_{i0} + Z_i - \frac{d_0}{2} \phi_i \end{cases}$$

Nous voulons construire les équations différentielles pour les essieux; comme dans les cas précédents nous utilisons une approche lagrangienne, il est donc nécessaire de calculer l'énergie cinétique. Nous calculons d'abord les dérivées du déplacement liées au pompage de chacun des bras; une fois que les vitesses des pompages sont disponibles il est possible de passer au calcul de l'énergie cinétique qui s'exprime selon l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_i = & \frac{1}{2} (m_{i_s} + m_{i_d}) \left[\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}_i^2 + x_i^2 \dot{\psi}^2 + l_{2i}^2 \dot{\phi}^2 + l_{2i}^2 \dot{\theta}^2 + 2x_i l_{2i} \dot{\psi} \dot{\phi} + \right. \\
 & \left. - 2l_{2i} \left\{ \begin{matrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{matrix} \right\}^T R_1^* \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\phi} \end{matrix} \right\} + 2\dot{\psi} \left\{ \begin{matrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{matrix} \right\}^T \frac{\partial}{\partial \psi} R_1^* \left\{ \begin{matrix} x_i - l_{2i} (\theta + \theta_0) \\ l_{2i} \phi \end{matrix} \right\} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \left[(m_{i_s} + m_{i_d}) \frac{l_{2i}^2}{8} \dot{\phi}^2 + (J_{x_{i_s}} + J_{x_{i_d}}) \dot{\phi}_i^2 + (J_{y_{i_s}} + J_{y_{i_d}}) \dot{\theta}^2 + \right. \\
 & \left. + (J_{z_{i_s}} + J_{z_{i_d}}) \dot{\psi}^2 + (m_{i_s} + m_{i_d}) \frac{l_{2i}^2}{8} \dot{\psi} \right]
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Nous avons introduit les équations pour le cas de l'essieu à roues indépendantes. Pour l'essieu rigide, il est évident que les bras sont fixés, leurs mouvements par rapport au pignon sont négligés et l'équation devient la suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_i = & \frac{1}{2} m_i \left[\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}_i^2 + x_i^2 \dot{\psi}^2 + q_{i0}^2 \dot{\phi}^2 + q_{i0}^2 \dot{\theta}^2 + 2x_i q_{i0} \dot{\psi} \dot{\phi} - \right. \\
 & \left. - 2q_{i0} \left\{ \begin{matrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{matrix} \right\}^T R_1^* \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\phi} \end{matrix} \right\} + 2\dot{\psi} \left\{ \begin{matrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{matrix} \right\}^T \frac{\partial}{\partial \psi} R_1^* \left\{ \begin{matrix} x_i + q_{i0} (\theta + \theta_0) \\ -q_{i0} \phi \end{matrix} \right\} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} (J_{x_i} \dot{\phi}_i^2 + J_{y_i} \dot{\theta}^2 + J_{z_i} \dot{\psi}^2) - J_{xz_i} \dot{\phi}_i \dot{\psi}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dans les équations que nous venons d'introduire nous avons supposé que les suspensions sont perpendiculaires au sol afin d'obtenir un modèle linéaire.

Dans l'équation 4.7, le terme q_{i0} représente la distance entre le centre de gravité et le centre de roulis de l'essieu rigide i .

Nous nous permettons enfin de rappeler au lecteur que les équations précédentes sont faites avec l'approximation des petits angles et donc que nous avons remplacé les sin et les cos par leurs développements limités au premier ordre.

4.5.3 Formulation du Lagrangien

Nous avons introduit, dans les paragraphes précédents, les parties qui sont nécessaires pour effectuer l'approche lagrangienne. Cette approche s'appuie sur la définition du Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$$

La plupart des voitures circulant aujourd'hui sont équipées d'un essieu avant à roues indépendantes et d'un essieu rigide à l'arrière. En partant de cette hypothèse, il est possible d'écrire l'énergie cinétique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} = & \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2} m_s \dot{Z}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\forall i} m_i \dot{Z}_i^2 + \frac{1}{2} J_x \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} J_y \dot{\theta}^2 + \\
 & + \frac{1}{2} J_z \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\forall i} J_{x_i}^* \dot{\phi}_i^2 - J_{xz} p s i \dot{\psi} - \dot{\psi} \sum_{\forall i} J_{xz_i}^* \dot{\phi}_i^2 + \\
 & + \left[\dot{X} \cos(\psi) + \dot{Y} \sin(\psi) \right] \left[J_s \dot{\theta} + \dot{\psi} (h m_s \phi + \sum_{\forall i} m_i q_{i0} \phi_i) \right] + \\
 & + \left[\dot{X} \sin(\psi) - \dot{Y} \cos(\psi) \right] \left(m_s h \dot{\phi} + \sum_{\forall i} m_i q_{i0} \dot{\phi}_i \right) - m_s c \dot{Z} \dot{\theta}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} m = m_s + \sum_{\forall i} m_i \\ J_x = J_{x_s} + m_s h^2 + \sum_{\forall i} J_{x_i} \\ J_y = J_{y_s} + m_s (h^2 + c^2) + \sum_{\forall i} (J_{y_i} + m_i q_{i0}^2) \\ J_z = J_{z_s} + m_s c h \\ J_{xz} = J_{xz_s} + m_s c h \\ J_{x_i}^* = J_{x_i} + m_i q_{i0}^2 J_{xz_i}^* = J_{xz_i} + m_i q_{i0} x_i \\ J_s = m_s h + \sum_{\forall i} m_i q_{i0} \end{cases}$$

Les sommes avec index $\forall i$ représentent l'extension pour les essieux à roues indépendantes. Pour avoir l'équation du Lagrangien sous sa forme complète il est aussi nécessaire de définir l'énergie gravitationnelle et l'énergie potentielle.

L'énergie gravitationnelle peut être calculée très facilement, lorsque la voiture est supposée rouler sur une route plate : elle peut être calculée à partir des coordonnées Z des barycentres :

$$\mathcal{U}_g = g m_s \{ Z + h \cos(\theta_0 + \theta) \cos(\phi) - c \sin(\theta_0 + \theta) \} + g \sum_{k=1}^4 (m_k Z_k)$$

Cette expression peut être approximée par un développement limité au deuxième ordre des cosinus :

$$\mathcal{U}_g = g m_s \left\{ Z - \frac{h}{2} [(\theta_0 + \theta)^2 + \phi^2] - c(\theta_0 + \theta) \right\} + g \sum_{k=1}^4 (m_k Z_k + m_s h)$$

Dans la démarche que nous sommes en train de suivre, nous voulons aboutir à un modèle linéaire. C'est pour cette raison que nous avons choisi des développements limités au deuxième ordre, pour inclure dans les équations tous les termes linéaires.

Il est maintenant possible de passer à la définition de l'énergie potentielle. Cette énergie est facilement calculable pour une suspension : il est possible de connaître ses points d'attache sans difficulté. Par contre, pour être cohérent avec la démarche du modèle linéarisé que nous sommes en train de développer, nous avons choisi de définir une raideur verticale K_i et une raideur de torsion (due au roulis) χ_i pour chacune des suspensions. Pour chacune d'elles, il est aussi possible de définir une longueur au repos L_i . Cette longueur peut être définie en fonction de la force F_{0_i} qui est exercée sur la suspension lors de la situation d'équilibre : $L_i = F_{0_i} / K_i$.

L'expression de l'énergie potentielle pour la i -ème suspension peut être calculée en utilisant l'équation 4.8. Cette équation est valable soit pour les essieux rigides soit pour les essieux à roues indépendantes. La seule différence est constituée des valeurs des raideurs qui seront différentes dans les deux cas :

$$\mathcal{U}_{si} = \underbrace{\frac{1}{2} \chi_i (\phi - \phi_i)^2}_{\text{raideur barre anti-roulis}} + \underbrace{\frac{1}{2} K_i (Z_i - Z + x_{mi} \theta + L_i)^2}_{\text{raideur du ressort}} \quad (4.8)$$

Il est possible de suivre la même démarche lors de l'analyse des pneumatiques, où on trouve aussi une raideur verticale. L'équation de l'énergie potentielle pour le pneumatique sera celle de l'équation 4.9. Lorsque nous considérons l'ensemble des pneumatiques d'un véhicule, l'énergie totale est celle de l'équation 4.10 :

$$\mathcal{U}_{p_{is(d)}} = \frac{1}{2} P_i \left(Z_i \pm \frac{t}{2} \phi_i - L_{p_i} \right)^2 \quad (4.9)$$

$$\mathcal{U}_{p_i} = P_i \left(Z_i^2 + \frac{t^2}{4} \phi_i^2 + L_{p_i}^2 - 2Z_i L_{p_i} \right)^2 \quad (4.10)$$

4.5.4 Fonction de dissipation de Rayleigh

Les suspensions sont habituellement formées d'un ressort et d'un amortisseur. L'analyse des ressorts a été conduite précédemment, nous voulons maintenant introduire l'analyse des amortisseurs. Les véhicules sont équipés pour la plupart avec des amortisseurs visqueux qui en première approximation peuvent être considérés linéaires. Il est donc possible de remplacer chaque amortisseur par un coefficient d'amortissement vertical c_i et un coefficient d'amortissement rotationnel (lié au roulis) Γ_i . Après ces considérations, il est possible de calculer la fonction de dissipation de Rayleigh associée à chacun des amortisseurs; cette équation a la forme suivante :

$$F_{s_i} = \overbrace{\frac{1}{2} \Gamma_i (\dot{\phi} - \dot{\phi}_i)^2}^{\text{amortissement barre anti-roulis}} + \overbrace{\frac{1}{2} c_i (\dot{Z}_i - \dot{Z} + x_{a_i} \dot{\theta})^2}^{\text{amortissement suspension}}$$

Comme pour le cas de l'énergie potentielle, il est possible d'effectuer une analogie entre le pneumatique et la suspension. La force de Rayleigh pour les pneumatiques sera :

$$F_{p_i} = c_{pi} \left(\dot{Z}_i^2 + \frac{t_i^2}{4} \dot{\phi}_i^2 \right)$$

Il est important de souligner que la formule précédente est valable pour un essieu et donc la fonction de Rayleigh calculée est valable pour les pneumatiques du même essieu.

4.5.5 Angle de dérive

Avant d'introduire les efforts appliqués à la voiture il peut être intéressant d'introduire quelques informations sur les angles de dérive des pneumatiques. Pour définir l'angle de dérive, il est nécessaire d'introduire la vitesse des points des contacts du pneumatique dans le repère x^*y^*z :

$$\{V_{P_{is(d)}}\}_{x^*y^*z} = \begin{Bmatrix} u + \dot{\theta} (q_{i_0} + z_{ic}) - \dot{\psi} \left[\pm \frac{t}{2} - \phi_i (q_{i_0} - z_{ic}) \right] \\ v + \dot{\phi}_i (q_{i_0} + z_{ic}) + \dot{\psi} [x_{ri} + (\theta_0 + \theta) (q_{i_0} + z_{ic})] \\ 0 \end{Bmatrix}$$

où q_{i_0} et z_{ic} sont des grandeurs caractéristiques du train.

Les variables u et v sont les composantes de la vitesse par rapport à la direction x^* et y^* . Vu que le point de contact forme un angle égal à l'angle de braquage δ_i plus éventuellement l'angle de braquage induit par le roulis, il est possible d'obtenir, après linéarisation, l'angle de dérive suivant :

$$\alpha_{i_{s(d)}} = \frac{v}{V} + \dot{\psi} \frac{x_{ri}}{V} - \dot{\phi}_i \frac{(q_{i_0} + z_{ic})}{V} - \delta_i - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi \quad (4.11)$$

Dans la modélisation on considère que les roues du même essieu ont le même angle de braquage δ_i , cette hypothèse est valable pour la plupart des essieux. L'angle de braquage des roues avant est proportionnel à l'angle volant fourni par le conducteur selon le rapport de démultiplication. Nous supposons cette valeur constante. Le coefficient $\frac{\partial \delta_i}{\partial \phi}$ représente l'angle de braquage induit par le roulis. Sa valeur dépend de la structure du train du véhicule. On nous a fourni au cours de la thèse la caractéristique de ce coefficient pour un véhicule donné. Vu que nous avons voulu obtenir un modèle linéaire nous avons fait l'hypothèse que le braquage induit est une constante et pour la déterminer nous avons calculé la tangente à l'origine de la caractéristique.

Vue la structure de l'équation, il est évident que les deux roues du même essieu ont le même angle de dérive. Il est donc possible dans la suite de réduire le modèle à un modèle bicyclette. Vu que normalement le roulis de l'essieu est faible, c'est possible de le négliger et d'obtenir pour la dérive l'équation suivante :

$$\alpha_{i_{s(d)}} = \frac{v}{V} + \dot{\psi} \frac{x_{ri}}{V} - \delta_i - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi \quad (4.12)$$

Si le véhicule est rigide, l'équation précédente devient :

$$\alpha_{i_{s(d)}} = \frac{v}{V} + \dot{\psi} \frac{x_{ri}}{V} - \delta_i$$

4.5.6 Forces généralisées

La dernière partie de l'équation de Lagrange est constituée des forces généralisées. En regardant les efforts entre le véhicule et son environnement, on constate que parmi les forces généralisées il y a les forces exercées par les pneumatiques, les forces aérodynamiques et les autres perturbations qui sont censées influencer le comportement du véhicule. Le déplacement virtuel du centre du pneumatique appartenant au i -ème essieu peut être défini de la façon suivante :

$$\left\{ \delta S_{Pis(d)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \delta x^* + \delta \theta (q_{i_0} + z_{ic}) - \delta \psi \left[\pm \frac{t_i}{2} - \phi (q_{i_0} + z_{ic}) \right] \\ \delta y^* + \delta \phi (q_{i_0} + z_{ic}) + \delta \psi [x_{ri} + (\theta_0 + \theta) (q_{i_0} + z_{ic})] \\ 0 \end{array} \right\}$$

En considérant le fait qu'il y a un couplage entre les déplacements vertical et longitudinal, l'expression du déplacement par rapport à x^* aura un terme supplémentaire :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_i (\delta z - x_{mi} \delta \theta)$$

Les forces appliquées au pneumatique sont essentiellement contenues dans le plan XY; il est donc possible d'obtenir une expression par rapport aux axes x^* et y . Les forces exercées par les pneumatiques auront la structure des équations (4.13) :

$$\begin{aligned} F_x^* &= F_{xt} \cos \left[\delta_i - \left(\frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \right) \phi \right] - F_{yt} \sin \left[\delta_i - \left(\frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \right) \phi \right] \\ F_y^* &= F_{xt} \sin \left[\delta_i - \left(\frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \right) \phi \right] + F_{yt} \cos \left[\delta_i - \left(\frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \right) \phi \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

En utilisant ces formules et en multipliant par les déplacements virtuels, il est possible d'obtenir l'équation des travaux virtuels (4.14). Cette équation est nécessaire pour compléter l'équation de Lagrange :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_i &= \delta x_i F_x^* + \delta y_i F_y^* = \delta x^* F_x^* + \delta y^* F_y^* + \delta Z \left(\frac{\partial x_i}{\partial z} \right) F_x^* + \\ &+ \delta \theta F_x^* \left(q_{i0} + z_{iC} - \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) x_{mi} * F_x^* \right) - \delta \phi_i F_y^* (q_{i0} + z_{iC}) + \\ &+ \delta \psi \left\{ -F_x^* \left[\pm \frac{t}{2} - \phi_i (q_{i0} + z_{iC}) \right] + F_y^* [x_{ri} + (\theta_0 + \theta) (q_{i0} + z_{iC})] + M_z \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Les forces généralisées peuvent être maintenant obtenues en dérivant le travail virtuel par rapport aux déplacements virtuels δx^* , δy^* , $\delta \theta$, ... Les forces obtenues sont en direction des axes x^* et y^* . Nous voulons avoir les forces dans le système inertiel, une rotation est donc nécessaire. L'équation (4.14) est valable pour des essieux rigides, comme nous avons fait l'hypothèse d'avoir des essieux à roues indépendantes, il est nécessaire de remplacer $\delta \phi$ par $\delta \phi_i$ et q_{i0} par $-l_2$.

Dans l'annexe A différentes modélisations du pneumatique sont introduites. Dans la suite la force latérale sera exprimée de façon linéaire par rapport à l'angle de dérive et l'angle de carrossage. Ce choix a été fait pour deux raisons : la première est liée au choix que nous avons fait d'utiliser des lois de commande linéaires, la deuxième au fait que cette modélisation est valable dans la plupart des situations de vie du véhicule et enfin qu'elle est relativement simple. Il est aussi intéressant de souligner que cette modélisation est valable pour des angles de carrossage inférieurs à 10° et pour des angles de dérive inférieurs à 6° . Le lecteur qui souhaite utiliser une modélisation non linéaire du pneumatique pourrait remplacer l'équation linéaire (4.15) par une équation non linéaire. Il est important enfin de souligner que l'équation (4.15) est valable pour un essieu mono-roue, mais elle peut être étendue au cas d'un pneumatique isolé :

$$F_{y_{pi}} = -C_i \alpha_i + C_{\gamma_i} \left[\gamma_i + \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \phi + \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi_i} \phi_i \right] \quad (4.15)$$

Si le véhicule n'est pas équipé d'un système de pilotage du carrossage, la valeur γ_i représente le carrossage au repos, qui peut être négligé. Il est possible d'appliquer la même démarche pour les efforts aérodynamiques qui sont appliqués au centre de la masse suspendue. Le déplacement virtuel dans le repère $x^* y^* z$ aura la forme suivante :

$$\{\delta S_{Gs}\}_{x^* y^* z} = \begin{Bmatrix} \delta x^* + h \delta \theta + h \phi \delta \theta \\ \delta y^* - h \delta \phi + (c + h (\theta_0 + \theta) \delta \psi) \\ \delta z - c \delta \theta \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Le travail virtuel dû aux forces et aux moments aérodynamiques peut être formulé selon (4.17) :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{aer} = & F_{xaer} \delta x^* + F_{yaer} \delta y^* + (F_{xaer} h - F_{zaer} c) \delta \theta + \\ & + [F_{xaer} h \phi + F_{yaer} (c + h(\theta_0 + \theta))] \delta \psi - F_{yaer} h \delta \phi + F_{zaer} \delta z + \\ & + M_{xaer} [\delta \phi - (\theta_0 + \theta) \delta \psi] + M_{yaer} (\delta \theta + \phi \delta \psi) + M_{zaer} (\delta \psi + \phi \delta \theta) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pour obtenir les forces généralisées, il suffit alors de dériver les travaux virtuels par rapport aux déplacements virtuels.

4.5.7 Equations du véhicule

Les paragraphes précédents ont été dédiés à l'introduction des équations nécessaires pour définir le modèle de Lagrange. Ayant à disposition toutes ces équations il est maintenant possible d'obtenir la mise en équation du véhicule.

Les équations du mouvement du véhicule sont calculables à partir de l'équation (4.18).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (4.18)$$

Il est maintenant possible de développer les calculs pour chaque degré de liberté du véhicule; dans un premier temps sont abordées les équations associées au mouvement de translation et ensuite celle liées à son mouvement de rotation. Le paragraphe se termine par les équations des suspensions.

Equations de translation

Nous considérons d'abord les équations associées aux degrés de liberté X et Y . Les équations les décrivant sont alors les suivantes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} &= m\dot{X} + A \cos(\psi) - B \sin(\psi) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Y}} &= m\dot{Y} + A \cos(\psi) + B \sin(\psi) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{X}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{Y}} = 0 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= J_s \dot{\theta} + \dot{\psi} (h m_s \phi + \sum_{\forall i} m_i q_{i0} \phi_i) \\ B &= -m_s h \dot{\phi} - \sum_{\forall i} m_i q_{i0} \dot{\phi}_i \end{aligned}$$

Avec ces hypothèses, il est possible d'écrire les équations suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} m\dot{V} + J_s \ddot{\theta} = Q_x^* \\ m(\dot{v} + V\dot{\psi}) - m_s h \ddot{\phi} - \sum_{\forall i} m_i q_{i0} \ddot{\phi}_i = Q_y^* \end{cases}} \quad (4.19)$$

Les expressions des efforts généralisés sont donc :

$$Q_x^* = \sum_{\forall i} F_{x_i} - \frac{1}{2} \rho V^2 S C_x$$

$$Q_y^* = Y_\beta \beta + Y_\psi \dot{\psi} + Y_\phi \phi + \sum_{\forall i} Y_{\phi_i} \phi_i + Y_\delta \delta + F_{ye}$$

avec

$$\begin{cases} Y_\beta = -\sum_{\forall i} C_i + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \frac{\partial C_y}{\partial \beta} \\ Y_\psi = -\frac{1}{V} \sum_{\forall i} x_{r_i} C_i \\ Y_\phi = \sum_{\forall i} C_i \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} + \sum_{\forall i} C_{\gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \\ Y_{\phi_i} = C_{\gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi_i} \\ Y_{\delta_i} = \sum_{\forall i} K'_i C_i + \sum_{\forall i} K'_i F_{x_{i_t}} \end{cases}$$

L'équation du mouvement pour le degré de liberté Z peut être obtenue de façon similaire au précédent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Z}} &= m_S \dot{Z} - m_S c \dot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z} &= \sum_{\forall i} [K_i (Z_i - Z + x_{m_i} \theta + L_i)] + m_S g \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{Z}} &= -\sum_{\forall i} [c_i (\dot{Z}_i - \dot{Z} + x_{a_i} \dot{\theta})] \\ \mathcal{Q}_z &= \sum_{\forall i} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_k F_{x_i} \right] + F_{zaer} + \sum_{\forall i} F_{a_i} \end{aligned}$$

L'équation sera donc :

$$\boxed{\begin{aligned} &m_S \ddot{Z} - m_S c \ddot{\theta} + \sum_{\forall i} (c_i) \dot{Z} - \sum_{\forall i} (c_i x_{a_i} \dot{\theta}) + \\ &+ \sum_{\forall i} (K_i Z) - \sum_{\forall i} (K_i Z_i) - \sum_{\forall i} (c_i \dot{Z}_i) - \sum_{\forall i} (K_i x_{m_i} \theta) = \\ &= F_{zaer} + \sum_{\forall i} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_i F_{x_i} + K_i L_i \right] - m_S g + \sum_{\forall i} (F_{a_i}) \end{aligned}} \quad (4.20)$$

Equations de rotation

Après avoir introduit les équations de translation, il est possible d'obtenir celles de rotation. La démarche est très similaire à celle introduite précédemment.

Nous considérons d'abord l'équation du roulis, en introduisant les équations énergétiques nécessaires à l'écriture de l'équation de Lagrange. Nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= J_x \dot{\phi} - J_{XZS} \dot{\psi} + \left(\dot{X} \sin(\psi) - \dot{Y} \cos(\psi) \right) J_S - m_S c h \dot{\psi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \left(\dot{X} \cos(\psi) + \dot{Y} \sin(\psi) \right) J_S \dot{\psi} + m_S g h \phi - \sum_{\forall i} [\chi_i (\phi - \phi_i)] \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\phi}} &= \sum_{\forall i} [\Gamma_i (\dot{\phi} - \dot{\phi}_i)] \\ \mathcal{Q}_\phi &= F_{\phi aer} + \sum_{\forall i} F_{a_i} \frac{t_i}{2} \end{aligned}$$

En écrivant l'équation de Lagrange, on obtient l'équation de roulis suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} J_x \ddot{\phi} - J_{xz} \ddot{\psi} - m_s h (\dot{v} - V \dot{\psi}) = \\ = L_\beta \beta + L_\phi \phi + L_{\dot{\phi}} \dot{\phi} + \sum_{\forall i} (L_{\phi_i} \phi_i) + \\ + \sum_{\forall i} L_{\dot{\phi}_i} \dot{\phi}_i + F_{\phi aer} + \sum_{\forall i} F_{a_i} \frac{t_i}{2} \end{aligned}} \quad (4.21)$$

avec

$$\begin{cases} L_\beta = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left[h \left(\frac{\partial C_y}{\partial \beta} \right) + l \left(\frac{C_{M_x}}{\partial \beta} \right) \right] \\ L_\phi = - \sum_{\forall i} \chi_i + m_s g h \\ L_{\dot{\phi}} = - \sum_{i=1}^2 \Gamma_i \\ L_{\dot{\phi}_i} = \Gamma_i \\ L_{\phi_i} = \chi_i \end{cases}$$

L'équation relative à l'angle de tangage θ se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= J_y \dot{\theta} + (\dot{X} \cos(\psi) + \dot{Y} \sin(\psi)) J_S - m_s c \dot{Z} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -m_s g h (\theta_0 + \theta) + m_s g c - \sum_{\forall i} [K_i x_{m_i} (Z_i - Z + x_{m_i} \theta + L_i)] \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}} &= \sum_{\forall i} [c_i x_{a_i} (\dot{Z}_i - \dot{Z} + x_{a_i} \dot{\theta})] \\ \mathcal{Q}_\theta &= - \sum_{\forall i} \left[F_{x_i}^* \left(q_{i0} + z_{ic} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_i x_{m_i} \right) \right] + \sum_{\forall i} (F_{a_i} x_{m_i}) + M_{yaer} - (F_{xaer} h + F_{zaer} c) \end{aligned}$$

Enfin, en ce qui concerne l'angle de lacet,

$$\boxed{\begin{aligned} J_y \ddot{\theta} - m_s c \ddot{Z} + J_S \dot{V} - m_s g h \theta + \sum_{\forall i} (K_i x_{m_i}^2 \theta) - \sum_{\forall i} (K_i x_{m_i} Z) + \\ + \sum_{\forall i} (K_i Z_i x_{m_i}) + \sum_{\forall i} (c_i \dot{Z}_k x_{a_i}) - \sum_{\forall i} (c_i x_{a_i} \dot{Z}) + \sum_{\forall i} (c_i x_{a_i}^2 \dot{\theta}) = \\ = - \sum_{\forall i} \left[K_i L_i x_{m_i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_i x_{m_i} F_{x_i} + (q_{i0} + z_{ic}) F_{x_i} \right] + \\ + M_{yaer} - (F_{xaer} h + F_{zaer} c) - \sum_{\forall i} (F_{a_i} x_{m_i}) + m_s g (\theta_0 h + c) \end{aligned}} \quad (4.22)$$

Pour terminer cette partie sur les équations de rotation, nous sommes obligés de nous intéresser à l'angle de lacet. Nous introduisons d'abord les dérivées du Lagrangien.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} &= J_z \dot{\psi} - J_{xz} \dot{\phi} + J_S \phi (\dot{X} \cos(\psi) + \dot{Y} \sin(\psi)) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi} = 0 \end{aligned}$$

En appliquant les équations précédentes, il est possible d'obtenir l'expression suivante pour l'équation de lacet :

$$\boxed{\begin{aligned} J_z \ddot{\psi} - J_{xz} \ddot{\phi} + \dot{V} (m_s h \phi + \sum_{\forall i} m_i q_{i0} \phi_i) - J_x z_i^* \ddot{\phi}_i = \\ = N_\beta \beta + N_{\dot{\psi}} \frac{\dot{\psi}}{V} + N_\phi \phi + \sum_{\forall i} N_{\phi_i} \phi_i + \sum_{\forall i} N_{\delta_i} \delta_i + \\ + M_{ze} - \sum_{\forall i} F_{x_i} y_i + \sum_{\forall i} x_{r_i} F_{x_i} \delta_i \end{aligned}} \quad (4.23)$$

avec

$$\begin{cases} N_\beta = -\sum_{\forall i} x_{r_i} C_i + \sum_{\forall i} \frac{\partial M_{z_k}}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S l \left(\frac{\partial C'_{M_z}}{\partial \beta} \right) \\ N_{\dot{\psi}} = \sum_{\forall i} \left[-C_i x_{r_i}^2 + x_{r_i} \frac{\partial M_{z_k}}{\partial \alpha} \right] \\ N_\phi = \sum_{\forall i} \left(x_{r_i} \frac{\partial \delta_k}{\partial \phi} C_i + x_{r_i} C_{\gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} - \frac{\partial M_{z_i}}{\partial \alpha} \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \right) - \frac{1}{2} \rho V_a^2 S l C_x \\ N_{\phi_i} = \sum_{\forall i} x_{r_i} C_{\gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi_i} + (f_0 + K V^2) P_i \frac{t_i^2}{2} \\ N_{\delta_i} = \left(C_i x_{r_i} + x_{r_i} C_i F_{x_{i_p}} - \frac{\partial M_{z_i}}{\partial \alpha} \right) \end{cases}$$

4.5.8 Equations de la suspension

Les degrés de liberté de la masse suspendue ont été introduits dans le paragraphe précédent. Il est donc possible de s'intéresser maintenant aux masses non suspendues, pour compléter les équations du véhicule. Le déplacement vertical et le mouvement de roulis de l'essieu sont les degrés de liberté des masses non suspendues. Comme dans le cas de la masse suspendue, les équations sont construites à partir de l'équation de Lagrange. En dérivant le Lagrangien, on obtient pour le déplacement vertical les équations suivantes :

$$m_i \ddot{Z}_i + (c_i + 2c_{p_i}) \dot{Z}_i - c_i \dot{Z} + c_i x_{a_i} \dot{\theta} + (K_i + 2P_i) Z_i - K_i Z + K_i x_{m_i} \theta = -K_i x_{a_i} \theta_0 - K_i L_i + 2P_i L_{p_i} - m_i g - \sum (F_{a_{is}} + F_{a_{id}}) \quad (4.24)$$

Nous procédons de la même façon pour calculer l'angle de roulis de l'essieu. Nous obtenons l'équation suivante :

$$J_{x_i}^* \ddot{\phi}_i - J_{x_{zi}}^{ast} \ddot{\psi} - m_i q_{i_0} (\dot{v} + V \dot{\psi}) = L_{i_\beta} \beta + L_{i_{\dot{\psi}}} \dot{\psi} + L_{i_\phi} \phi + L_{i_{\dot{\phi}}} \dot{\phi} + L_{i_{\phi_i}} \phi_i + L_{i_{\dot{\phi}_i}} \dot{\phi}_i + L_{i_{\delta_i}} \delta_i + \left(F_{a_{is}} - F_{a_{id}} \frac{t_i}{2} \right) \quad (4.25)$$

avec

$$\begin{cases} L_{i_\beta} = (q_{i_0} + z_{i_C}) C_i \\ L_{i_{\dot{\psi}}} = (q_{i_0} + z_{i_C}) C_i \frac{x_{r_i}}{V} \\ L_{i_\phi} = \Gamma_i \\ L_{i_{\dot{\phi}}} = \chi_i - (q_{i_0} + z_{i_C}) \left[C_i \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} + C_{\gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \right] \\ L_{i_{\dot{\phi}_i}} = -\Gamma_i - c_{p_i} \frac{t_i^2}{2} \\ L_{i_{\phi_i}} = -\chi_i - (q_{i_0} + z_{i_C}) C_{\gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} - P_i \frac{t_i^2}{2} \\ L_{i_{\delta_i}} = -(q_{i_0} + z_{i_C}) (F_{x_{i_t}} + C_i) \end{cases}$$

4.5.9 Modèles utilisés

Nous avons introduit dans ce chapitre un modèle linéaire général du véhicule. Avant d'introduire les lois de commande nous voulons rapidement rappeler au lecteur les différentes entrées et sortie du modèle.

Entrées :

- braquage des roues avant $\delta_{1,2}$

- braquage des roues arrière $\delta_{3,4}$
- carrossage avant $\gamma_{1,2}$
- carrossage arrière $\gamma_{3,4}$
- efforts de freinage appliqués aux roues F_{x_i}
- efforts des suspensions F_{a_i}

Sorties :

- vitesse de lacet $\dot{\psi}$
- accélération latérale γ_T
- angle de roulis ϕ

Par la suite nous présenterons des contrôleurs agissant sur les modèles suivants :

- contrôle de la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ en agissant sur le braquage des roues avant $\delta_{1,2}$
- contrôle de la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ en agissant sur le braquage des roues arrière $\delta_{3,4}$
- contrôle de la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ en agissant sur la répartition du freinage F_{x_i}
- contrôle de la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ en agissant sur le carrossage γ_i
- contrôle du roulis ϕ en agissant sur les efforts des suspensions F_{a_i} .

4.5.10 Conclusions

Les équations décrivant complètement la dynamique du véhicule sont donc (4.19)-(4.23). On peut trouver la modélisation précédente un peu lourde dans sa mise en oeuvre : cette méthodologie demande beaucoup de calculs surtout pour le calcul de l'équation de Lagrange. Toutefois le choix de cette approche est dicté par sa modularité et sa facilité de sa mise en oeuvre. Elle ne nécessite pas la connaissance approfondie de la mécanique du véhicule, mais elle demande seulement des connaissances de base sur les organes qui compose un véhicule. Elle permet aussi une modularité accrue de la modélisation : si jamais il y a un changement au niveau d'une partie du véhicule, il est suffisant de remplacer les équations énergétiques associées à la partie qui doit être remplacée.

4.6 Modèle bicyclette

Dans les paragraphes précédents un modèle linéaire général a été introduit. Souvent dans la littérature la modélisation est réalisée avec le modèle bicyclette. Dans ce type de modèle le véhicule est considéré comme un corps rigide, et on suppose qu'il y a une seule roue pour chaque train, en projetant les deux roues du train sur l'axe central du véhicule. La roue résultante aura un angle de braquage équivalent à l'angle de braquage des deux roues, une dérive qui sera la projection des dérives des deux roues, elle n'aura pas de carrossage ni de braquage induit, ce qui revient à supposer l'absence de roulis. Le modèle bicyclette que nous présentons ici est le plus simple, il a seulement 3 degrés de liberté, correspondant aux mouvements longitudinal, latéral et de lacet.

CHAPITRE 4. MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE DU VÉHICULE

Comme le véhicule est considéré comme un corps rigide, l'angle de dérive peut être approximé par l'équation suivante :

$$\alpha_i = \beta + \frac{x_{r_i}}{V}\dot{\psi} - \delta_i$$

Les équations du véhicule dans le cas du modèle bicyclette sont obtenues par simple élimination des composantes relatives au roulis et au pompage. Le système sera donc sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m(\dot{v} + V\dot{\psi}) = Y_\beta\beta + Y_{\dot{\psi}}\dot{\psi} + \sum_{\forall i} Y_{\delta_i}\delta_i + F_{y_e} \\ J_z\dot{\psi} = N_\beta\beta + N_{\dot{\psi}}\dot{\psi} + \sum_{\forall i} N_{\delta_i}\delta_i + M_{z_e} \end{cases} \quad (4.26)$$

Les constantes définies dans (4.26) sont les mêmes que pour le véhicule avec suspensions.

Chapitre 5

Synthèse des lois de commande mono actionneur

5.1 Introduction

Dans la partie précédente les outils théoriques nécessaires aux lois de commande mono-actionneur ont été introduits.

Ce chapitre a donc pour but d'illustrer la mise en oeuvre de ces lois. Il s'agit du coeur du notre travail puisque les architectures de commande qui nous avons proposées (et dont le développement est résumé au chapitre 6) s'appuient sur ces lois mono actionneur.

Lorsque le problème du contrôle global du châssis est introduit, deux grosses problématiques doivent être affrontées : d'un côté nous avons la sécurité active, de l'autre le confort. Lorsque nous nous intéressons à la sécurité active, le pilotage des actionneurs du véhicule est axé sur la correction et la prévention des mauvaises appréciations du conducteur. Lors de l'analyse de ce thème il est donc nécessaire de s'intéresser d'abord au contrôle des dynamiques longitudinales et latérales. Le but du confort est de rendre le véhicule agréable pour le conducteur, ce qui passe entre autres par le contrôle du roulis. Il est néanmoins vrai qu'agir sur le confort a aussi un impact sur la sécurité : en reprenant l'exemple précédent agir sur la répartition de roulis induit une modification du comportement latéral du véhicule et donc influence la sécurité.

Il est de toute façon important de souligner que les deux parties ne sont pas totalement décorrélées : lorsqu'un véhicule est équipé d'un système pour le contrôle du roulis il est possible de contrôler l'angle de roulis mais, en modifiant la charge sur les pneumatiques, de contrôler aussi le comportement longitudinal et /ou latéral du véhicule.

Nous avons décidé d'approcher la synthèse des lois de commande en nous appuyant sur ces deux parties. Lors de la première partie nous regardons les contrôleurs censés agir sur la sécurité active (contrôle de la dynamique latérale) ensuite nous analysons le confort via l'étude du contrôle du roulis et de son influence sur la sécurité. Le chapitre est donc organisé selon la structure suivante : d'abord nous présentons la partie dédiée au contrôle de la dynamique latérale, nous passons ensuite à celle dédiée au contrôle du roulis. Dans chaque partie nous

présentons d’abord une rapide étude bibliographique et nous passons ensuite à la synthèse des lois de commande. Chacune des lois présentées est censée agir sur un seul actionneur à la fois. Lorsque nous considérons la dynamique latérale, nous analysons les contrôleurs pour piloter le braquage avant, le braquage arrière et le freinage. Dans la partie dédiée au contrôle du roulis nous développons d’abord un contrôleur pour asservir l’angle de roulis et ensuite nous regardons une solution possible pour effectuer la répartition de la charge, ce qui permet de mettre en place un contrôle complémentaire du lacet du véhicule.

Toutes les lois de commande sont testées en simulation sur un logiciel fourni par Renault permettant de simuler le comportement dynamique du véhicule. Ce simulateur est construit à partir d’un modèle non linéaire du véhicule et il est validé par rapport à des essais réalisés sur piste.

5.2 Contrôle latéral

5.2.1 Etude bibliographique

Parmi les variables d’état caractérisant le comportement latéral du véhicule, il y a toujours nécessairement la vitesse de lacet, le déplacement latéral et l’angle de dérive. Dans certains cas il y a aussi l’angle de roulis. Dans ce mémoire nous avons décidé de ”confiner” le roulis uniquement dans la partie qui lui est dédiée : celle sur le confort. D’après les équations d’état du modèle du véhicule, on peut contrôler la dynamique latérale en agissant sur plusieurs actionneurs. Quotidiennement des millions de conducteurs dans le monde agissent sur le braquage des roues avant pour fournir le comportement souhaité à leur véhicule. Nous pouvons donc envisager de corriger le comportement en lacet en agissant sur le même organe. Comme il est possible d’agir sur le moment de lacet en braquant les roues avant, il est aussi possible de modifier le moment de lacet en agissant sur le braquage des roues arrière. Par la suite il est possible d’agir sur la répartition du freinage des roues, comme il est fait d’abord dans les systèmes du contrôle de la dynamique du véhicule actuellement commercialisés.

Dans [Anw03] est présenté un contrôleur du moment de lacet en agissant sur le freinage et en utilisant des méthodes prédictives. En partant d’un modèle linéarisé du véhicule, ils se sont intéressés à la fonction de transfert entre le moment M_z , applicable au véhicule, et la vitesse de lacet. Ce moment de lacet est appliqué via des moteurs électriques qui sont positionnés sur les roues. Pour calculer la loi de commande les auteurs ont défini un critère quadratique sur l’erreur entre la vitesse de lacet de référence et la vitesse de lacet. Comme il est fait dans la plupart des cas la vitesse de lacet de référence est obtenue en utilisant la vitesse du véhicule et l’angle de braquage des roues avant. Les auteurs ont aussi prévu deux contrôleurs différents : ils ont séparé le cas du véhicule en sous-virage de celui du véhicule en survirage. Ils détectent la situation du véhicule et appliquent le couple de freinage sur les roues internes lors d’une situation de sous-virage et sur les roues externes dans le cas de survirage. Les auteurs n’affrontent pas le problème du blocage des roues et donc de l’impossibilité de faire passer de l’effort au sol.

L'action de freinage est aussi utilisée dans [TKF03], avec un couple de freinage délivré par des moteurs électriques. La solution présentée est réalisée en utilisant deux boucles de contrôle. La structure de contrôle proposée par les auteurs est représentée sur la Figure 5.1.

La première boucle est utilisée pour asservir la vitesse de lacet du véhicule sur une vitesse de lacet de référence. Cette boucle est réalisée en utilisant la logique floue. Un algorithme en logique floue est aussi utilisé pour fournir une estimation de la vitesse longitudinale du véhicule.

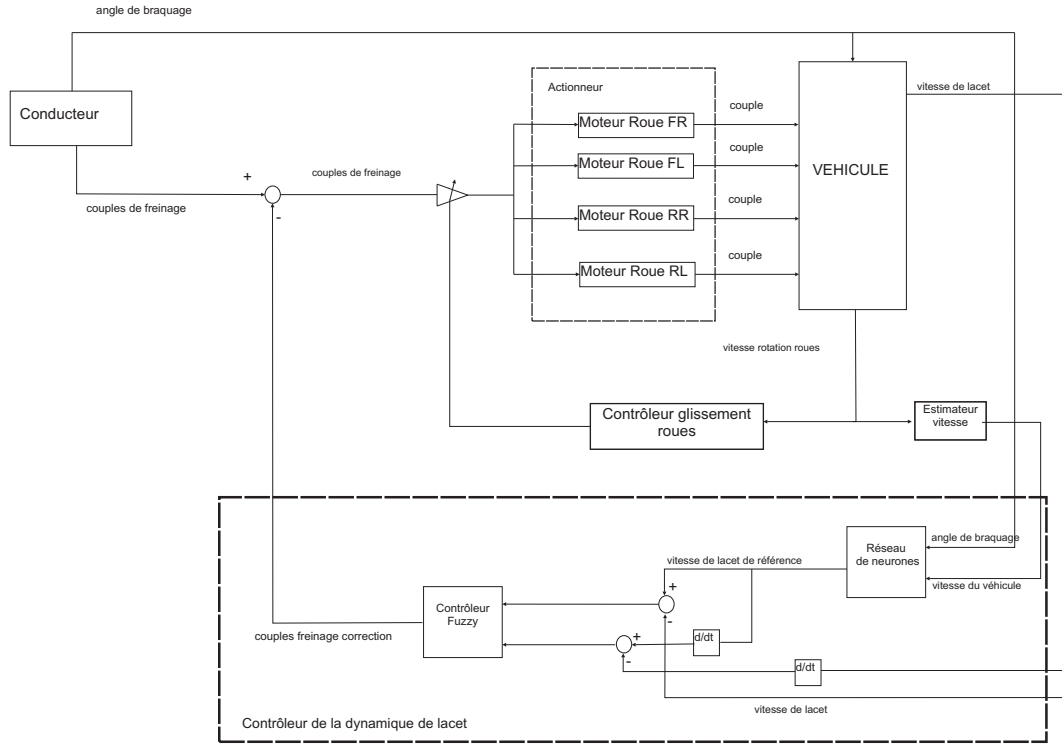


FIG. 5.1 – Structure de commande [TKF03]

Pour déterminer la vitesse de lacet de référence, les auteurs utilisent un modèle statique comprenant le coefficient de sous-virage K , l'empattement du véhicule L , la vitesse du véhicule V ainsi que l'angle de braquage δ et ils le corrigent par une valeur qui sera fonction de l'angle de braquage et de la vitesse $\dot{\psi}_{corr}$. Ce facteur de correction est calculé par un réseau de neurones. La vitesse de lacet de référence aura donc la forme exprimée dans l'équation (5.1) :

$$\dot{\psi}_{ref} = \frac{V}{L + KV^2} \delta + \dot{\psi}_{corr}(\delta, V) \quad (5.1)$$

Toujours en analysant la figure 5.1, il est possible de constater que les auteurs ont aussi prévu une deuxième boucle de régulation afin de réguler le glissement des roues et d'éviter le blocage de celles-ci. Pour effectuer la régulation du glissement, les vitesses de rotation des roues sont centrées en utilisant la vitesse de lacet et l'accélération latérale.

Dans le cadre du contrôle du moment de lacet, la logique floue trouve aussi d'autres applications comme dans [Buc02a] et [Buc02b]. Ici l'auteur utilise cette méthodologie pour contrôler

directement le glissement de chacune des roues du véhicule. En partant de l'erreur entre la vitesse de lacet et la vitesse de lacet de référence $e = |\dot{\psi}| - |\dot{\psi}_{ref}|$, il est possible de définir l'état du véhicule : si cette erreur est positive le véhicule est en sous-virage, tandis que si elle est négative le véhicule est en sur-virage. Le contrôle du moment de lacet est effectué en utilisant le plan de phase. Le véhicule est d'abord localisé sur le plan de phase. Sur ce même plan, il est possible d'identifier le comportement souhaité du véhicule, et de définir la distance entre le véhicule actuel et son comportement souhaité. Cette distance est l'entrée du contrôleur en logique floue qui fournira en sortie les glissements des roues qui seront les consignes des contrôleurs de bas niveau.

Dans le cadre du contrôle du moment de lacet on trouve aussi des solutions utilisant les modes glissants comme dans [KP01]. Ainsi ici le contrôle est réalisé en exerçant une action sur les freins. Il est aussi intéressant de souligner que le contrôleur synthétisé n'a pas seulement pour but de contrôler le moment de lacet, mais aussi d'asservir la dérive au centre de gravité sur une valeur souhaitée. Les modèles de référence sont des modèles statiques qui peuvent être obtenus à partir d'un modèle bicyclette. Dans cette solution aussi le cas du blocage des roues n'est pas pris en considération.

Il est aussi possible de trouver des solutions utilisant des méthodologies de commande plus simples et en exerçant toujours l'action de commande sur les freins comme par exemple dans [ZEP⁺96]. Les auteurs proposent ici un contrôleur qui est réalisé en utilisant un retour d'état et où les variables d'état sont la vitesse de lacet et l'angle de dérive. La loi de commande est réalisée de façon que le gain affecté à l'angle de dérive augmente quand cet angle augmente. La loi de commande pilote directement les glissements des roues. L'algorithme de commande prévoit donc une phase d'estimation et une phase de contrôle du glissement. Les auteurs ont structuré la logique de commande selon les phases suivantes : l'observation des variables du véhicule, le calcul du modèle de référence, le contrôle d'état, le calcul des glissements.

Un autre exemple d'application du contrôle du moment de lacet avec l'utilisation du freinage est proposé dans [SN03]. La loi de commande synthétisée ici est composée de deux parties. Dans la première, il y a un contrôleur en boucle ouverte qui a pour but d'asservir à zéro l'angle de dérive du véhicule en régime établi à partir de l'angle volant demandé par le conducteur. Le contrôleur de la deuxième partie a pour but d'asservir à zéro la dérive lors du régime dynamique et d'asservir la vitesse de lacet à une valeur fournie par un modèle de référence. Ce contrôleur agit en boucle fermée. Il est obtenu par retour d'état avec optimisation d'un critère quadratique à horizon infini.

L'utilisation du freinage pour contrôler le moment de lacet est sans doute la plus utilisée. Un autre exemple applicatif est présenté dans [SM01]. Ici les auteurs utilisent un contrôleur PI pour asservir la vitesse de lacet sur une vitesse de lacet de référence. Les gains sont choisis par essais successifs. La vitesse de référence est obtenue en utilisant l'angle de braquage sur un véhicule neutre. Selon la situation de conduite : véhicule en sur-virage ou en sous-virage, le couple de correction est appliqué à la roue avant externe dans le premier cas ou à la roue arrière interne dans le deuxième cas. La valeur de la vitesse de lacet en régime établi est définie en utilisant l'équation (5.2) :

$$\dot{\psi}_{ref} = \frac{V}{b(1 + a/b)}\delta \quad (5.2)$$

où a et b sont les empattements avant et arrière, V est la vitesse du véhicule, δ est l'angle de braquage. Cependant les auteurs ont rapidement constaté que si l'adhérence du véhicule change, les performances du contrôleur peuvent être dégradées. Ils ont donc envisagé d'effectuer une estimation de l'adhérence. Cette information est utilisée dans un contrôleur en boucle ouverte. La structure de contrôle sera donc celle de la figure 5.2. Pour alimenter le contrôleur en boucle ouverte, les auteurs ont proposé d'utiliser l'erreur entre un modèle non linéaire avec l'information sur l'adhérence et un modèle non linéaire sans l'information sur l'adhérence. Cette erreur est donc passée par un contrôleur PID réglé avec une bande passante élevée qui assure que le changement de couple, lié à l'adhérence, sera plus rapide que le temps de réponse du véhicule.

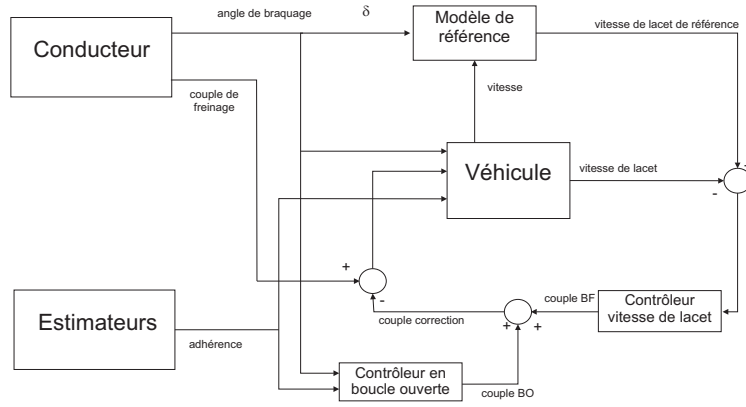


FIG. 5.2 – Structure de commande [SM01]

Il est aussi possible de trouver des exemples où le contrôle du moment de lacet est effectué en utilisant les actionneurs de braquage comme dans [SNYN94]. Ici aussi la loi de commande est synthétisée en utilisant un retour d'état. Cependant la loi de commande est décomposée en deux parties : une partie en boucle ouverte et une partie en boucle fermée. La première est utilisée lors des réponses rapides, tandis que la seconde est utilisée pour garantir les objectifs et pour garantir une convergence plus rapide de la réponse.

Il est donc possible de définir la commande suivante :

$$u = F_p(x - x_m) + B^{-1}(A_m - A)x_m + B^{-1}B_m\delta$$

où x représente l'état du véhicule, x_m l'état du modèle de référence, δ est l'angle de braquage, A, B sont les matrices d'état du véhicule A_m, B_m sont celles du modèle de référence et F_p est le gain du retour d'état obtenu en résolvant l'équation de Riccati. Le gain du retour d'état est calculé en minimisant un critère quadratique à horizon infini (critère LQ classique).

TAB. 5.1 – *Récapitulatif des articles et des méthodologies utilisées pour le contrôle du lacet*

Article	Actionneur	Méthodologie et Intérêt
[Anw03]	freinage	commande prédictive avec répartition du freinage
[TKF03]	freinage avec des moteurs électriques	logique floue avec répartition du freinage
[Buc02a] et [Buc02b]	freinage	logique floue afin de contrôler le glissement
[KP01]	freinage	modes glissants avec répartition du freinage
[ZEP ⁺ 96]	freinage	retour d'état avec contrôle du glissement
[SN03]	freinage	retour d'état avec répartition du freinage
[SM01]	freinage	contrôleur PI avec répartition du freinage
[SNYN94]	action directrice sur les roues avant et arrière	retour d'état avec un réseau de neurones
[OEDS ⁺ 04]	action directrice sur les roues avant	retour d'état

Les auteurs ont constaté qu'un gain constant n'est pas satisfaisant lors du changement de la vitesse du véhicule et donc du changement de son état dynamique. Ils ont donc proposé une solution dans laquelle les gains du contrôleur en boucle ouverte et de celui en boucle fermée sont actualisés en utilisant un réseau de neurones.

Une autre solution utilisant le braquage des roues avant pour asservir le contrôle du moment de lacet est proposée dans [OEDS⁺04]. Les auteurs proposent une loi de commande par retour d'état où les gains du contrôleur sont obtenus en minimisant le critère quadratique :

$$J = \int_0^\infty [y^T Q y + u^T R_1 u + \dot{u}^T R_2 \dot{u}] \quad (5.3)$$

Le tableau 5.3 résume les principales caractéristiques des travaux que nous venons d'évoquer.

Mécanique des actionneurs

Braquage avant Il existe aujourd'hui différents systèmes pour corriger la trajectoire d'un véhicule en agissant sur le braquage des roues avant : certains systèmes conservent un lien mécanique entre le volant et les roues, tandis que d'autre l'ont fait disparaître. Dans les systèmes avec lien direct nous pouvons trouver deux philosophies différentes. Dans les deux cas le système utilise un moteur électrique, dans la première le moteur ajoute un couple supplémentaire sur la colonne de direction, dans la deuxième il modifie le rapport de démultiplication en utilisant un système d'engrenages appelé " planetary gear ". Les systèmes sans lien mécanique utilisent la technologie appelée " by-wire ", dans ce cas le système de contrôle agit directement sur un

actionneur positionné au niveau de la roue.

Braquage Arrière Les systèmes de gestion du braquage des roues arrière sont apparus pour la première fois dans les années '80. Ces premiers systèmes, principalement des systèmes hydromécaniques, utilisaient une liaison directe entre les roues avant et les roues arrière. La partie hydraulique était divisé en deux parties, l'une positionnée sur le train avant et l'autre positionnée sur le train arrière. Celle du train avant était conçue pour effectuer l'assistance, celle de l'arrière pour effectuer le braquage des roues. Le système recevait l'angle de braquage, via un arbre directement lié à la colonne de direction, et la vitesse du véhicule. En utilisant ces deux informations il était capable de piloter le système hydraulique du train arrière. Un autre type de technologie est celle sans liaison directe entre les roues avant et les roues arrière, dans ce cas le système de contrôle pilote directement les biellettes du train arrière. A la différence des systèmes avec liaison directe, dans la plupart des cas l'angle arrière est obtenu via une liaison mécanique directe à partir de l'angle avant, dans les systèmes by-wire l'angle est calculé en fonction de l'état dynamique du véhicule.

Freinage Dans le domaine de l'automobile, il est aujourd'hui possible de trouver deux types de systèmes de freinage. Le premier consiste dans l'utilisation d'un système de freinage hydraulique, le deuxième dans un système de freinage électrique. Lorsque nous parlons de système de freinage appliqué à l'automobile, nous ne pouvons pas négliger les programmes de contrôle de la stabilité. Ces programmes sont aujourd'hui développés pour agir sur un système de freinage hydraulique et sont composés d'un booster pour faire monter rapidement la pression dans le circuit de freinage, d'une pompe hydraulique pour contrôler la pression de freinage, ainsi que d'un système pour contrôler le moteur. Dans les dernières années des solutions utilisant le freinage électrique ont vu le jour. Dans ce cas les étriers sont mis en contact avec le disque en utilisant un moteur électrique. Cette solution, selon les inventeurs, occupe moins d'espace, elle est plus rapide et elle n'est pas sujette aux problèmes de fuites comme l'est la solution hydraulique.

5.2.2 Synthèse de la loi de commande

Introduction

Soit en utilisant une expérience directe, soit en analysant les équations de la dynamique du véhicule, il est possible de constater que le comportement du véhicule évolue rapidement et différemment en fonction de sa vitesse longitudinale.

On peut illustrer ce phénomène, en utilisant les équations du véhicule, en traçant les réponses fréquentielles du système pour différentes vitesses (figure 5.3). Dans la figure considérée que l'entrée du système est l'angle de braquage des roues avant δ_i , tandis que la sortie est la vitesse de lacet $\dot{\psi}$. Le modèle utilisé pour tracer cette figure est le suivant :

$$\begin{cases} m(\dot{v} - V\dot{\psi}) &= J_S\ddot{\phi} + Y_\beta\beta + Y_{\dot{\psi}}\frac{\dot{\psi}}{V} + Y_\phi\phi + \sum_{k=1}^2 (Y_{\delta_k}\delta_{AV}) + \sum_{k=1}^4 F_{xk}\delta_k + F_{y_e} \\ J_z\ddot{\psi} &= N_\beta\beta + N_{\dot{\psi}}\frac{\dot{\psi}}{V} + \sum_{k=1}^2 (N_{\delta_{AV}}\delta_k) - \sum_{k=1}^4 (F_{xk}y_k) + \sum_{k=1}^4 x_k F_{xk}\delta_k + M_{z_e} \end{cases}$$

Nous supposons que tous les coefficients du véhicule sont constants y compris la rigidité de dérive, la masse du véhicule et les inerties.

En considérant une plage de vitesse comprise entre $[10,30]$ m/s et avec un pas de $1 m/s$, on constate effectivement que le système en boucle ouverte présente un comportement fortement dépendant de la vitesse. La même constatation est possible lors de l'analyse de la réponse du système à un échelon : le dépassement et le gain statique du système en boucle ouverte grandissent lorsque la vitesse augmente.

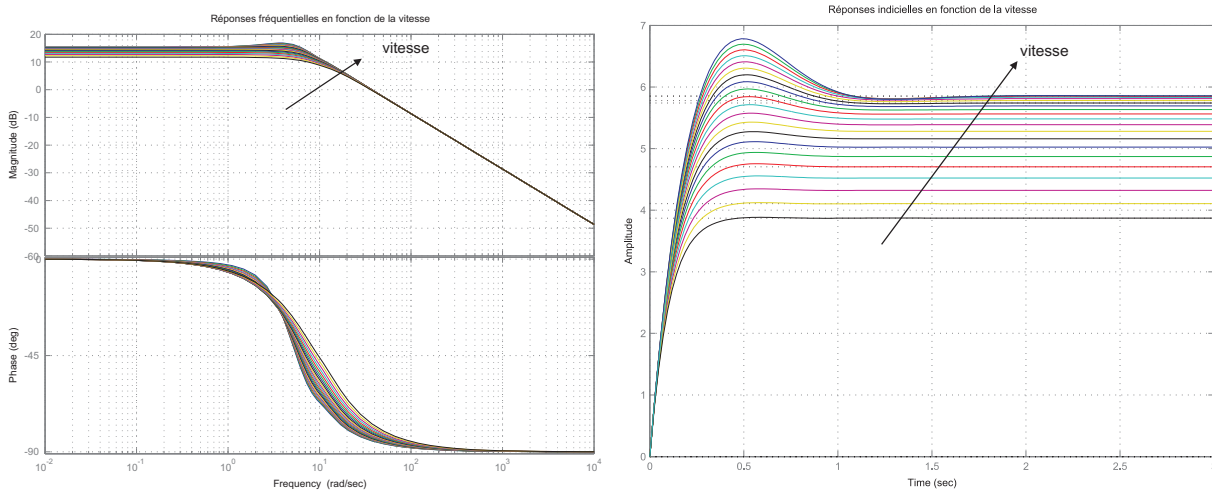


FIG. 5.3 – Réponses en fonction de la vitesse du véhicule passif

En partant de ces constatations, il est possible d'envisager deux solutions. Soit il est possible de prévoir une solution utilisant un contrôleur fixe qui soit robuste sur une grande plage de vitesses, soit on doit prévoir un contrôleur qui soit capable d'évoluer en fonction de la vitesse.

La première idée est sans doute très intéressante d'un point de vue applicatif : elle ne demande pas beaucoup d'espace mémoire dans le calculateur de bord. Par contre il est difficile de trouver un contrôleur qui soit robuste vis-à-vis d'une variation de vitesse très importante.

C'est pour cette raison que la solution utilisant un contrôleur qui puisse évoluer en fonction de la vitesse est conseillée. Il est possible de trouver deux solutions pour faire évoluer le contrôleur en fonction de la vitesse.

La première est celle par interpolation qui est souvent utilisée lorsque la loi de commande est obtenue, par exemple, par retour d'état : l'interpolation dans ce cas est appliquée au gain. La deuxième, moins répandue dans le domaine de l'automobile mais très largement utilisée dans le domaine aérospatiale est celle des contrôleurs linéaires à paramètres variants. Dans ce mémoire c'est l'approche par cette méthodologie LPV qui est utilisée.

Structure de la loi de commande

Choix des paramètres Il est intéressant maintenant de regarder la structure des lois de commande qui sont appliquées au véhicule par la suite. Comme annoncé dans le paragraphe précédent les lois seront synthétisées en utilisant la méthodologie LPV. Pour comprendre l'utilisation de cette méthodologie il est intéressant de ré-introduire la modélisation du véhicule qui nous permettra de mieux interpréter le choix des paramètres.

Vu que cette partie est dédiée au contrôle latéral du véhicule, nous reportons seulement les équations liées à cette dynamique :

$$m(\dot{v} - V\dot{\psi}) = J_S\ddot{\phi} + Y_\beta\beta + Y_\psi\frac{\dot{\psi}}{V} + Y_\phi\phi + \sum_{k=1}^4 Y_{\delta_k}\delta_k + \sum_{k=1}^4 F_{xk}\delta_k + \sum_{k=1}^4 Y_{\gamma_k}\gamma_k + F_{y_e} \quad (5.4)$$

$$J_x\ddot{\phi} = (J_{XZS} + m_S ch)\ddot{\psi} + (\dot{v} - V\dot{\psi})J_S + L_\beta\beta + L_\phi\phi + L_\phi\dot{\phi} + \sum_{k=1}^4 L_{\delta_k}\delta_k + \sum_{k=1}^4 L_{\gamma_k}\gamma_k + L_\psi\frac{\dot{\psi}}{V} + F_{\phi_e} \quad (5.5)$$

$$J_z\ddot{\psi} = N_\beta\beta + N_\psi\frac{\dot{\psi}}{V} + \sum_{k=1}^4 N_{\delta_k}\delta_k - \sum_{k=1}^4 F_{xk}y_k + \sum_{k=1}^4 x_k F_{xk}\delta_k + M_{z_e} \quad (5.6)$$

Dans les applications qui suivront les entrées considérées sont :

- le braquage des roues avant $\delta_{1,2}$
- le braquage des roues arrière $\delta_{3,4}$
- le carrossage avant $\gamma_{1,2}$
- le carrossage arrière $\gamma_{3,4}$
- les efforts de freinage des roues F_{x_i}
- les efforts des suspensions F_{a_i}

Lors du contrôle de trajectoire nous considérerons comme seule sortie la vitesse de lacet $\dot{\psi}$, tandis que lors du contrôle du roulis la sortie du modèle est l'angle de roulis ϕ .

Les notations utilisées sont les mêmes que celles utilisées dans le chapitre 4. En regardant les équations du véhicule, il est possible de constater qu'elles sont non linéaires. La non linéarité est liée à la présence de la vitesse et de son inverse qui sont multipliées par des variables d'état. Nous pouvons mettre le modèle sous forme linéaire en considérant la vitesse et son inverse comme des paramètres mesurables. En utilisant cette hypothèse, il est possible d'obtenir une formulation linéaire du système et cette représentation sera affine par rapport aux paramètres.

Le fait d'avoir obtenu un modèle affine en les paramètres V et $1/V$ nous permet d'utiliser des méthodologies de synthèse LPV polytopiques. Le vecteur des paramètres sera donc $\rho = [\rho_1 \quad \rho_2] = [V \quad 1/V]$ où $\rho_2 = 1/\rho_1$ et $\rho_1 \in [V_{min} \quad V_{max}]$.

Le choix de ces deux paramètres est particulier puisqu'ils ne sont pas indépendants : le domaine de variation des paramètres est en effet une hyperbole.

Choix et Construction du polytope Nous avons décidé d'utiliser une approche LPV polytopique pour synthétiser nos lois de commande. Dans ce cas nous avons besoin d'utiliser un domaine convexe pour pouvoir calculer le contrôleur.

Le domaine défini par les deux paramètres (l'hyperbole) n'est pas satisfaisant puisqu'il n'est pas convexe. Il est donc nécessaire d'en définir un nouveau qui contient l'hyperbole. Le fait de choisir un domaine plus grand que celui défini par les paramètres implique que ce nouveau domaine est conservatif. En effet, par rapport au domaine défini, le véhicule est amené à se déplacer seulement sur l'hyperbole : l'algorithme qui sera présenté par la suite envisage aussi la loi de contrôle pour des valeurs des paramètres qui ne seront jamais atteintes.

Le choix effectué présente, par contre, l'avantage d'être relativement simple et intuitif. Il est aussi possible de constater que les paramètres dans ce cas sont explicitement considérés comme réels.

Il est maintenant possible d'introduire le polytope qui est utilisé par la suite. D'abord il est nécessaire d'identifier l'intervalle des vitesses sur lequel le véhicule est censé agir. Ce choix peut être effectué de façon différente pour chacune des performances envisagées par le constructeur. Pour une performance donnée, l'intervalle des vitesses est exprimé sous la forme $V \in [V_{min} \quad V_{max}]$.

À partir de cet intervalle, il est possible de déterminer l'intervalle pour l'autre paramètre. Vu que les paramètres choisis sont la vitesse et son inverse, il est important d'éviter de mettre la vitesse nulle dans l'intervalle des vitesses acceptées pour éviter d'avoir un domaine infini.

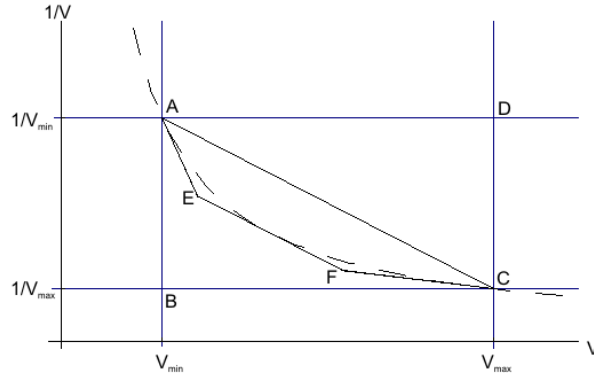
En considérant les hypothèses précédentes, les deux paramètres évoluent sur la portion d'hyperbole contenue dans le rectangle de sommets $ABCD$ (figure 5.4). Il s'agit d'un domaine convexe mais qui peut être affiné en considérant le trapèze $AEFC$ défini comme suit :

- en considérant que la grande base du trapèze est la diagonale AC du rectangle, la petite est construite parallèle à la grande et tangente en un seul point à l'hyperbole.
- les côtés restants sont obtenus à partir des tangentes à l'hyperbole aux points A et C

La construction du polytope a été présentée ici parce qu'elle est commune aux contrôleurs agissant sur le plan de roue et sur le freinage : lorsque les intervalles de vitesses seront les mêmes les polytopes seront aussi les mêmes.

Synthèse de la loi de commande Les lois de commande développées par la suite ont toutes une structure commune dans le cas du contrôle via le plan de roue comme dans le cas du contrôle via le freinage. C'est pour cette raison que nous avons décidé de présenter ici la structure utilisée dans ces lois de commande.

Les lois sont développées en utilisant une approche H_∞ par loop-shaping associée avec une méthodologie LPV. Pour réaliser les lois de commande, il est nécessaire d'abord de définir les

FIG. 5.4 – *Structure du polytope*

filtres de pré- et de post compensation comme c'est déjà le cas pour une synthèse H_∞ par loop-shaping. Il y a donc un filtre de pré-compensation $W_1(s)$ et un filtre de post-compensation $W_2(s)$. Le pré-compensateur est choisi de façon classique : c'est un filtre passe bas afin de limiter le comportement en haute fréquence et pour atténuer les bruits de mesure. Ce filtre de pré-compensation permet aussi de garantir la robustesse aux dynamiques négligées. Il a enfin pour but d'éviter de solliciter trop fortement les commandes dans les hautes fréquences, et de diminuer ainsi l'activité des actionneurs.

Le post-compensateur est choisi en général de façon à obtenir des gains élevés en basses fréquences (par exemple au moyen d'actions intégrales), et à garantir la précision de la correction. Lors de l'application numérique nous avons décidé d'ajouter un filtre passe bas aussi sur le filtre de post-compensation.

La structure des deux filtres sera alors :

- pour le filtre de pré compensation :

$$W_1(s) = \frac{K_1}{(1 + \tau_1 s)}$$

- pour le filtre de post compensation :

$$W_2(s) = \frac{K_2}{s(1 + \tau_2 s)}$$

Le choix des filtres est réalisé pour chaque ensemble d'actionneurs et de capteurs choisis et selon les performances souhaitées lors de la mise au point. Néanmoins il est possible de définir certaines règles de base pour choisir les valeurs de K_1 , K_2 , τ_1 et τ_2 . La valeur de K_1 doit être du même ordre de grandeur que la commande nécessaire pour rejeter la perturbation. La valeur de K_2 doit être du même ordre de grandeur que l'erreur que nous acceptons sur la sortie mesurée. La valeur de τ_1 est choisie en considérant soit la bande passante de l'actionneur utilisé soit selon la vitesse que nous voulons donner à la commande. Pour conclure la valeur de τ_2 est choisie de façon à filtrer le bruit de sortie.

Une fois que ces valeurs sont choisies, il est possible de les modifier en garantissant toujours les performances du système. Néanmoins il est important que le paramètre soit changé en conservant son du même ordre de grandeur et que sa nouvelle valeur ne change pas de façon significative le comportement fréquentiel du système.

Les filtres sont identiques sur chacun des sommets du polytope et ne sont donc pas fonction de la vitesse. La solution avec des filtres eux aussi fonction de la vitesse ne sera pas explorée ici.

Il est aussi important de souligner que les filtres ont la même structure quels que soient les actionneurs utilisés. Donc la structure de commande mise en place permet d'être relativement souple vis-à-vis du choix des actionneurs.

Avant d'effectuer le calcul du contrôleur, il sera nécessaire de calculer le modèle augmenté, c'est-à-dire le modèle du véhicule élargi avec les filtres qui ont été présentés précédemment.

Calcul du contrôleur pour une vitesse donnée Une fois que la synthèse est obtenue, nous nous trouvons avec quatre contrôleurs, un pour chacun des sommets du polytope. Pour pouvoir utiliser les contrôleurs, il est d'abord nécessaire de connaître la vitesse du véhicule pour ensuite calculer le contrôleur instantané du véhicule.

Pour obtenir la vitesse du véhicule, il est possible de suivre deux parcours différents. Le premier consiste en l'utilisation d'un capteur de vitesse ou d'un dispositif capable de mesurer la vitesse. L'utilisation d'un dispositif capable de mesurer la vitesse est souvent très coûteux et donc difficilement utilisable dans les véhicules de série. Pour cette raison, la vitesse est souvent calculée en utilisant la deuxième solution. Celle-ci consiste en l'estimation de la vitesse du véhicule à partir de la vitesse de rotation des roues et dans certains cas de l'information fournie par un accéléromètre comme illustré par exemple en [CPPGP]. Ici un algorithme estime la vitesse du véhicule en utilisant les grandeurs les mieux adaptées au calcul en fonction de la situation de conduite. Nous ferons par la suite l'hypothèse que l'erreur entre la vitesse réelle et la vitesse estimée est négligeable, ce qui est le cas dans les essais réalisées. Ajoutons que la robustesse du correcteur en fonction de la vitesse sera analysée a posteriori.

Lorsque la vitesse V est disponible, il est nécessaire de calculer sa position par rapport aux sommets du polytope pour pouvoir ensuite réaliser la combinaison linéaire des contrôleurs qui nous fournira le contrôleur pour la vitesse V .

Le polytope utilisé est un trapèze. Il est donc possible de définir le système d'équations suivant pour calculer les coefficients de pondération α_i à appliquer à chaque sommet :

$$\begin{cases} 1/V = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 \\ V = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 \\ 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \end{cases} \quad (5.7)$$

où (x_i, y_i) $i = 1, \dots, 4$ représentent les coordonnées des quatre sommets. Ce système présente

seulement trois équations pour quatre coefficients. Il y a donc une infinité de solutions possibles.

S'impose donc le problème de définir un algorithme capable de choisir une solution. Cet algorithme doit garantir une continuité dans l'évolution des α_i afin de garantir une transition graduelle et sans trop d'à-coup entre les contrôleurs.

La solution de ce problème peut être faite en utilisant plusieurs algorithmes.

Algorithme 5.2.1

- I. si $V > V_{min}$, aller en II; sinon garder le correcteur correspondant à $V = V_{min}$.
- II. à partir de la vitesse du véhicule V , résoudre le système d'équations (5.7) en minimisant au sens des moindres carrés la distance entre les $\alpha_i(t-1)$ (déterminés au pas précédent) et les $\alpha_i(t)$
- III. si tous les $\alpha_i \geq 0$, aller en IV, sinon :
 - ajouter la condition $\alpha_i = 0$ au système (5.7).
 - résoudre le système d'équations (5.7) en considérant cette nouvelle contrainte.
- IV. calculer la représentation d'état du contrôleur comme combinaison linéaire des contrôleurs obtenus dans les sommets du polytope et aller en I

Dans cet algorithme le calcul des α_i proposé est effectué à chaque pas de temps. Une solution pour optimiser les ressources de calcul pourrait être de recalculer les contrôleurs que si la différence de vitesse deviant supérieur à un certain seuil δ défini en accord avec l'analyse de robustesse.

L'algorithme introduit présente le problème de ne pas garantir que les coefficients ainsi obtenus sont positifs. Nous avons constaté dans les différentes applications traitées que les solutions fournies sont toujours non négatives : toutes les solutions sont comprises dans l'intervalle $[0; 1]$. Une variante de cet algorithme est celle qui minimise la distance par rapport au centre du trapèze.

Si une solution garantissant le fait d'avoir tous les coefficients positifs est recherchée, il est possible d'utiliser l'algorithme suivant.

Algorithme 5.2.2

- I. si $V > V_{min}$, aller en II; sinon garder le correcteur correspondant à $V = V_{min}$.
- II. à partir de la vitesse mesurée V , résoudre quatre fois le système d'équations (5.7) en imposant à chaque fois un $\alpha_i = 0$
- III. conserver seulement les solutions où tous les α_i sont positifs ou nuls.
- IV. calculer la norme de la différence entre les solutions acceptables et la solution du pas de calcul précédent
- V. conserver celle pour laquelle la norme est la plus faible.

VI. à partir des α_i obtenus calculer le contrôleur qui lui est associé comme combinaison linéaire des contrôleurs dans chacun des sommets du polytope et aller en I.

En pratique, les deux algorithmes donnent des résultats satisfaisants. Lors des essais réalisés aucun des deux n'est apparu meilleur que l'autre.

Conclusion Nous avons décidé de regrouper les parties communes à tous les contrôleurs dans les paragraphes précédents, pour éviter de répéter plusieurs fois les mêmes choses dans la suite. Lors des paragraphes suivants, nous faisons donc référence aux paragraphes qu'on vient de présenter pour nous concentrer davantage sur les résultats obtenus avec cette méthodologie vis-à-vis des différents actionneurs.

Pour éviter de multiplier les cas d'étude, seule la solution dans la quelle aucune borne n'est imposée à la vitesse de variation des paramètres est présentée dans le corp du mémoire. Une comparaison entre synthèse LPV avec ou sans prise en compte de la vitesse de variation des paramètres apparaît dans [PDP06], qui est reproduit en Annexe D. Cette article considère de plus la synthèse de lois avec plusieurs actionneurs.

Structure de contrôle Il est important de se rappeler que le contrôleur s'insère dans une boucle qui comprend aussi le conducteur. Il est donc rarement amené à corriger l'erreur par rapport à une vitesse de lacet nulle, mais plus souvent il devra intervenir lorsque le véhicule est en sous-virage ou en sur-virage.

C'est pour cette raison que dans la boucle de contrôle, il est nécessaire d'introduire un bloc qui soit capable d'interpréter la volonté du conducteur et qui génère ensuite une consigne de vitesse de lacet que le contrôleur devra suivre.

Cela nous conduit à la structure de la figure 5.5, où les entrées du conducteur sont :

- l'angle volant
- les pressions de freinage

la commande 1 est :

- l'angle de braquage avant
- les pressions de freinage

la commande 2 est :

- le braquage des roues arrière

les mesures du véhicules sont :

- la vitesse de lacet
- l'accélération latérale

les signaux de référence sont :

- la vitesse de lacet de référence
- l'accélération latérale de référence

β est la dérive au centre de gravité, ψ est le lacet du véhicule, m est la masse du véhicule, v est sa vitesse, c_F et c_R sont les rigidités de dérive des pneumatiques, l_F et l_R sont les distances entre les essieux et le centre de gravité, l est l'empattement du véhicule, J_z est l'inertie de lacet et δ_w est l'angle de braquage des roues avant.

En résolvant les équations dans le cas statique, il est possible d'obtenir les relations suivantes entre l'angle volant et la vitesse de lacet :

$$\dot{\psi} = \frac{1}{l} \frac{v}{1 + \frac{v^2}{v_{car}^2}} \delta_w \quad (5.9)$$

$$v_{car} = \sqrt{\frac{c_F c_R l^2}{m (c_R l_R - c_F l_F)}} \quad (5.10)$$

Dans l'équation (5.10), la vitesse caractéristique est donnée de façon explicite, mais il est aussi possible d'utiliser une cartographie obtenue à partir des caractéristiques du véhicule pour la définir. Un tel choix permet de mieux typer le comportement du modèle de référence sur celui d'un véhicule de série. Il est aussi intéressant de souligner que dans l'industrie automobile ce choix est souvent utilisé.

En pratique la vitesse caractéristique v_{car} reste toujours comprise entre 70 km/h et 110 km/h. Le choix de la vitesse caractéristique définit le comportement souhaité du véhicule : elle détermine si le véhicule est sous-vireur ou sur-vireur.

Cette vitesse est donc choisie par les metteurs au point afin de satisfaire les exigences des constructeurs. Souvent cette vitesse caractéristique est codée sur une cartographie ; nous avons choisi au cours de nos simulations d'utiliser cette approche et nous avons donc construit une cartographie pour cette grandeur. La vitesse caractéristique a été choisie pour maintenir un comportement sous-vireur du véhicule. Le véhicule aura ainsi un comportement un peu plus sous-vireur à haute vitesse qu'à faible vitesse.

Il est maintenant possible de s'intéresser au comportement dynamique du modèle de référence. Lorsque nous observons un véhicule passif, on constate que la bande passante entre l'angle volant et la vitesse de lacet est de l'ordre de 5 rad/s. Il peut donc être intéressant d'introduire un filtre passe-bas pour donner au modèle de référence le même comportement qu'un véhicule passif.

Avant de conclure il est nécessaire d'introduire une saturation de la vitesse de lacet de référence : la physique du système ne permet pas d'avoir des valeurs supérieures à $\mu g/V$. C'est pour cette raison que le modèle de référence peut être enfin formulé selon les équations (5.11) :

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(s) &= \frac{5}{s + 5} \frac{1}{l} \frac{V}{1 + \frac{V^2}{v_{char}^2}} \delta_w(s) \\ |\dot{\psi}(t)| &\leq \frac{\mu g}{V} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Mise en forme du contrôleur réduit La synthèse selon des méthodologies H_∞ permet d'obtenir des contrôleurs robustes, mais qui dans la plupart des cas sont d'ordre élevé. C'est le cas des contrôleurs obtenus lors de notre étude. L'introduction d'une méthodologie de réduction s'avère être nécessaire. Le fait d'avoir utilisé une méthodologie LPV polytopique introduit un problème supplémentaire sur les contrôleurs réduits que nous pouvons obtenir. En effet nous avons autant de contrôleurs que de sommets et la réduction est effectuée sur chaque contrôleur séparément. Lorsque nous effectuons la réduction il est possible de constater que les variables d'état sont les mêmes, mais parfois la variable x_i est changée en $-x_i$. Ce changement de signe ne change en rien le comportement du contrôleur sur le sommet, mais il est problématique lorsque nous considérons tous les contrôleurs ensemble. En effet si les contrôleurs n'ont pas la même représentation d'état il n'est pas possible de calculer de façon correcte leur combinaison linéaire. Pour garantir que tous les contrôleurs ont la même représentation d'état nous avons introduit l'algorithme suivant :

Algorithme 5.2.3

- I. réduction des contrôleurs dans les sommets en utilisant la factorisation première.*
- II. considérer la représentation d'état du sommet A comme celle de référence*
- III. analyser les autres sommets selon la démarche suivante*
 - créer un vecteur TR de transformation
 - regarder les signes des éléments de la matrice d'entrée des contrôleur réduits pour les sommets C, E et F .
 - si les éléments ont le même signe ajouter 1 dans la position du vecteur TR correspondant à l'état analysé
 - si les éléments n'ont pas le même signe ajouter -1 dans la position du vecteur TR correspondant à l'état analysé
 - créer une matrice de transformation T qui a comme diagonale le vecteur TR .
 - transformer la représentation d'état des sommets C, E et F selon les matrices qu'on a calculées

Applications

5.2.3 Contrôle du plan de roue

Dans le domaine de l'automobile, l'expression "plan de roue" est souvent utilisée comme synonyme de toutes les actions agissant sur le pneumatique hormis le freinage. Ce paragraphe a donc pour objectif d'aborder le contrôle du moment de lacet d'un véhicule en agissant soit sur le braquage des roues avant, soit sur le braquage des roues arrière, soit sur le carrossage des pneumatiques. Pour illustrer les performances obtenues avec ces trois actionneurs, nous avons choisi de considérer les prestations de mise en virage et de freinage léger en virage.

Définition des performances - Mise en virage et freinage léger en virage

Les performances choisies sont évaluées de façon très similaire : on considère qu'un véhicule les satisfait lorsqu'il est capable de réduire la surtension de vitesse de lacet qui est générée par les deux manoeuvres.

Lors de la mise en virage, les véhicules passifs présentent un dépassement de la vitesse de lacet par rapport à la vitesse de lacet de référence. Néanmoins dans la plupart des cas de conduite un tel dépassement n'est pas dangereux pour la sécurité du véhicule et de ses occupants.

Lorsque nous nous intéressons au freinage en virage, il est important de faire quelques précisions : cette manoeuvre est dangereuse seulement lorsque le véhicule est à la limite de l'adhérence, dans les autres cas, freiner lorsque la voiture est en virage ne représente pas un danger. Nous considérons le cas d'un freinage lorsque le véhicule est à la limite de la perte d'adhérence et par la suite lorsque nous parlons de freinage en virage nous faisons référence à cette configuration. Considérons donc un véhicule qui soit dans cette situation. Si le conducteur est obligé d'effectuer un freinage, le véhicule perd définitivement l'adhérence du train : le report de charge longitudinal a pour conséquence d'enlever l'adhérence résiduelle sur le train. À partir de ce moment le véhicule part en tête à queue.

Le test nécessaire pour évaluer les performances est le suivant : un véhicule, lancé à une vitesse V_1 ¹, est d'abord installé sur un virage de rayon R_1 . Suite au braquage du conducteur il sera donc possible d'évaluer la performance de mise en virage. Une fois que le véhicule se trouve en virage établi, le conducteur exerce une pression très légère sur la pédale du frein. Cette pression sera suffisante pour rendre le véhicule instable et donc mettre ses occupants en danger.

Le contrôleur installé sur le véhicule est considéré bon lorsqu'il est capable de garantir une erreur faible entre la vitesse de lacet et sa référence : $|\dot{\psi} - \dot{\psi}_{ref}| < \epsilon$.

Définition du contrôleur pour le braquage avant

Nous avons introduit précédemment tous les outils nécessaires pour calculer les contrôleurs ainsi que les différentes étapes à suivre afin d'en calculer un. Pour illustrer l'utilisation d'un contrôleur agissant sur le plan de roue et utilisant la démarche introduite, nous avons décidé d'utiliser un contrôleur capable de modifier l'angle des roues avant indépendamment de la volonté du conducteur. Logiquement ce contrôleur agit sur le même actionneur utilisé normalement par le conducteur ; différentes solutions techniques sont possibles, parmi les plus connues il y a l'Active Front Steering (AFS), mais aussi, vu le développement des systèmes by wire, le Steering By Wire (SBW).

La première chose à faire avant d'introduire la loi de commande est de choisir un polytope. Comme introduit précédemment, les paramètres choisis sont la vitesse et son inverse. Le polytope qui en dérive dans le cas de la commande par braquage des roues avant est celui de la

1. Les paramètres identifiant le test ne sont pas fournis pour des raisons de confidentialité.

figure 5.4. L'intervalle de vitesse est $[30,110]$ km/h .

Les filtres de pré- et de post- compensation qui ont été utilisés pour effectuer la synthèse d'une loi de commande agissant sur les roues avant sont les suivants :

$$W_1(s) = 0,02 \frac{1000}{s + 1000}$$

$$W_2(s) = \frac{100}{s} \frac{100}{s + 100}$$

Les critères utilisés pour choisir les filtres sont les mêmes qu'indiqué dans les paragraphes précédents. Il s'en suit que les valeurs numériques des filtres sont :

- $K_1 = 0,02$ qui est équivalent à un angle volant de 20°
- $K_2 = 100^2$ qui est équivalent à une erreur admissible de l'ordre de $0,01$ rad pour la vitesse de lacet
- $\tau_1 = 10^{-3}$ et $\tau_2 = 10^{-2}$, ces deux valeurs sont choisies en accord avec la dynamique que nous voulons fournir à l'actionneur et avec le niveau de bruit que nous pouvons accepter ainsi qu'avec les performances visées par le contrôleur.

Il est maintenant possible de calculer le contrôleur par synthèse LPV. Cette méthodologie de synthèse garantit de bonnes performances et aussi des bonnes caractéristiques de robustesse, mais malheureusement comme nous avons déjà affirmé précédemment fournit des contrôleurs d'ordre élevé. Dans notre cas le modèle de synthèse utilisé est d'ordre 5, la présence des filtres de pré- et post- compensation sont dans leur ensemble d'ordre 3. Il est donc évident que le modèle augmenté est d'ordre 8. Le contrôleur synthétisé est donc lui aussi d'ordre 8. Le contrôleur ainsi obtenu est d'ordre un peu élevé et donc difficilement implantable dans le véhicule. En effet l'espace mémoire dans un ordinateur embarqué est réduit et il y a nécessité, dans le domaine automobile, de partager cette ressource entre tous les systèmes embarqués. Il est donc nécessaire de réduire l'ordre des contrôleurs afin de demander le moins d'espace mémoire possible.

L'utilisation d'une méthode de réduction d'ordre a posteriori peut se révéler intéressante. Parmi les méthodes existantes, celle de la réduction par les valeurs singulières de Hankel de la factorisation première a été retenue ([BB97] et [Pal03]).

Avec cette réduction, il est possible d'obtenir pour le contrôleur issu de la synthèse un ordre 3; en ajoutant les filtres de pré- et post- compensation on obtient donc un contrôleur complet d'ordre 6.

Nous appliquons la réduction à chaque contrôleur associé à un sommet du polytope. Pour chaque sommet nous vérifions que le contrôleur réduit et celui d'ordre plein ont le même comportement fréquentiel. Nous vérifions aussi, pour des vitesses différentes, les réponses fréquentielles

2. En suivant les indications fournies auparavant, il est possible d'accepter des valeurs de K_1 et K_2 du même ordre de grandeur que celles introduites sans changer de façon significative le comportement du contrôleur en boucle fermée.

des contrôleurs d'ordre plein et d'ordre réduit. Pour conclure, nous vérifions en simulation que la performance obtenue avec les contrôleurs d'ordre réduit est semblable à celle obtenue avec les contrôleurs d'ordre plein. Les performances linéaires sont toutes analysées sur le modèle linéaire de synthèse, tandis que les simulations sont effectuées sur un modèle non linéaire.

Les contrôleurs dans les sommets du polytope peuvent être mis sous la forme suivante³ :

$$K_{AV}(s) = \frac{\alpha_{1AV}s^3 + \alpha_{2AV}s^2 + \alpha_{3AV}s + \alpha_{4AV}}{\beta_{1AV}s^3 + \beta_{2AV}s^2 + \beta_{3AV}s + \beta_{4AV}} \quad (5.12)$$

Le contrôleur complet est donc sous la forme

$$K_a(s) = W_1(s) K_{AV}(s) W_2(s) \quad (5.13)$$

Sur la figure 5.6, on constate que les réponses fréquentielles des contrôleurs complets réduits et de ceux d'ordre plein sur les quatre sommets du trapèze sont très proches.

Une fois le contrôleur obtenu, il est possible d'observer la réponse fréquentielle en boucle ouverte et celle en boucle fermée du système piloté par le contrôleur du braquage avant. Ces réponses sont reportées sur la figure 5.7 pour dix valeurs de la vitesse entre V_{min} et V_{max} . Il est possible de constater que les réponses des contrôleurs d'ordre plein et d'ordre réduit dans les sommets sont très similaires et donc d'en conclure que l'utilisation du correcteur d'ordre réduit est sans doute possible sans dégradation des prestations.

La loi développée a pour but de rejeter la perturbation. C'est pour cette raison que nous avons décidé de reproduire sur la figure 5.8, les réponses fréquentielles de la fonction de transfert F_{rAV} .

$$F_{rAV} = \frac{G(s)}{1 + G(s)K_a(s)}$$

Cette fonction nous permet de voir si le contrôleur est capable de rejeter les perturbations sur la commande : ces perturbations peuvent être dues soit à l'action du conducteur au niveau du volant, soit à un mauvais fonctionnement de l'actionneur qui se produit typiquement lorsque l'effort transmit au sol n'est pas cohérent avec celui prévu par le modèle linéaire que nous avons utilisé pour calculer la loi de commande.

En regardant les résultats reportés sur la figure 5.8, nous constatons la présence d'un intégrateur à basse fréquence qui nous permet d'affirmer que le système corrigé est capable de rejeter les perturbations constantes. Nous pouvons aussi voir que la fonction est loin de 0 dB et que donc nous pouvons bien rejeter aussi les autres types de perturbations.

Nous pouvons maintenant introduire les résultats obtenus sur le test de la mise en virage et sur celui du freinage léger en virage. Sur la figure 5.9, on constate que la vitesse de lacet lors de la mise en virage correspond exactement à la consigne demandée par le bloc d'interprétation de la volonté du conducteur. Il est aussi évident de constater que lors du freinage le véhicule sans contrôle de la trajectoire devient rapidement survireur et par la suite instable, tandis que celui avec le système de contrôle du braquage est capable de garantir la stabilité du véhicule.

3. les coefficients des polynômes ne sont pas donnés pour des raisons de confidentialité

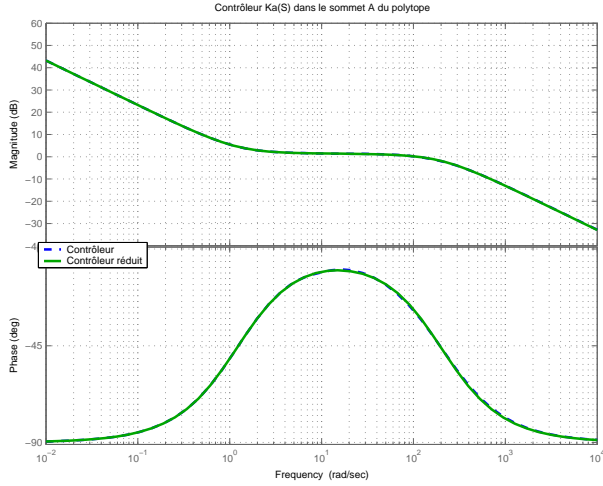
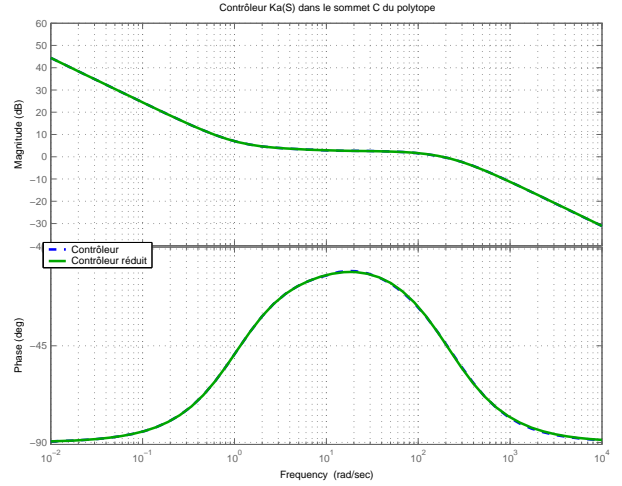
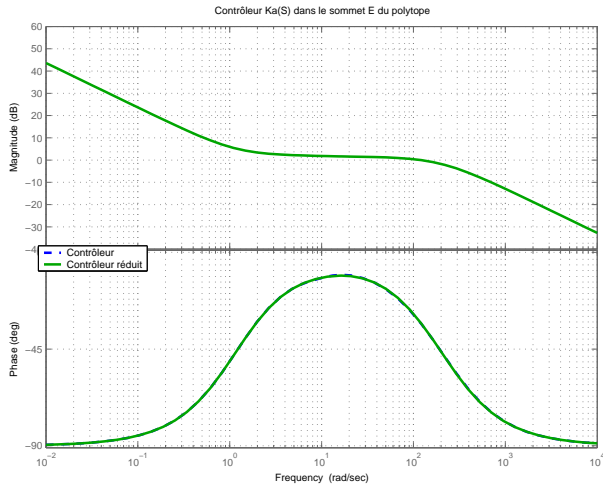
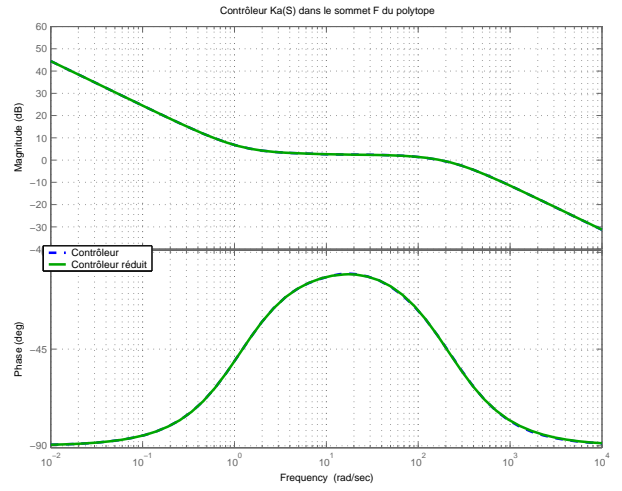
*Sommet A du polytope**Sommet C du polytope**Sommet E du polytope**Sommet F du polytope*

FIG. 5.6 – Réponse fréquentielle des contrôleurs de braquage avant

La commande appliquée au volant est un échelon qui dans la réalité n'est pas réalisable. C'est pour cette raison que nous avons prévu un filtre pas bas entre la commande et la génération de la vitesse de lacet de référence. La bande passante de ce filtre est déterminée afin de prendre en compte l'aspect physique du problème.

Définition du contrôleur pour le braquage arrière

Lors du paragraphe précédent, le contrôleur du moment de lacet a été réalisé en utilisant le braquage des roues avant.

Le contrôle du moment de lacet est maintenant réalisé en utilisant le seul braquage des roues arrière.

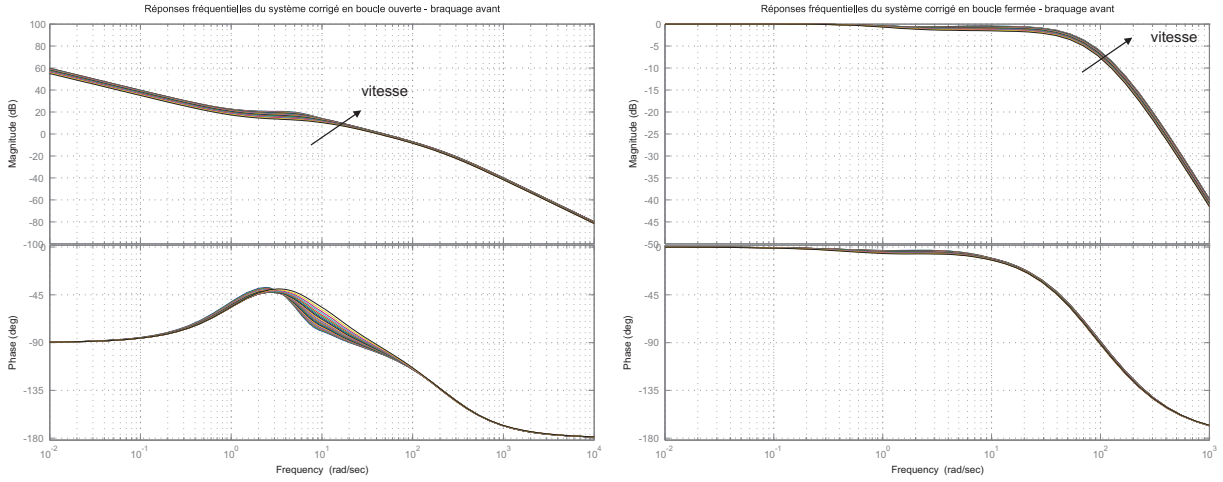


FIG. 5.7 – Réponse fréquentielle du système en boucle ouverte et fermée - braquage roues avant

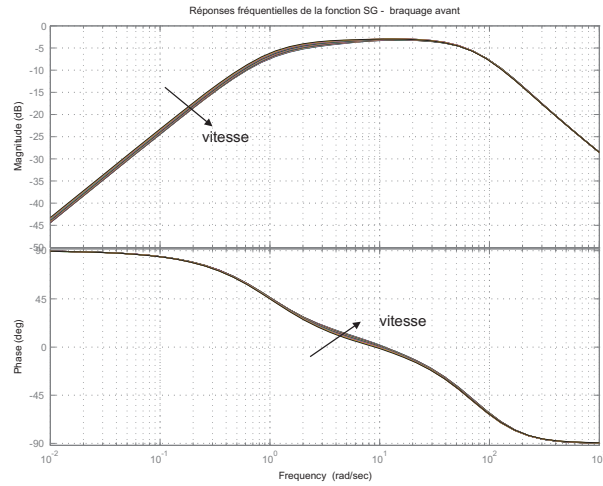


FIG. 5.8 – Réponse fréquentielle de la fonction $F_{r_{AV}}$ - braquage roues avant

Les filtres de pré- et de post- compensation dans le cas d'utilisation du braquage arrière sont les mêmes que pour le braquage avant :

$$W_1(s) = 0,02 \frac{1000}{s + 1000}$$

$$W_2(s) = \frac{100}{s} \frac{100}{s + 100}$$

Le modèle utilisé pour la synthèse est d'ordre 5 et en considérant les filtres de pré- et post- compensation, l'ordre final du contrôleur obtenu par synthèse LPV sera donc 8. La réduction, comme dans le cas précédent, peut donc être intéressante, pour permettre l'implantation dans un véhicule d'une loi qui ne demande pas trop de ressources mémoire.

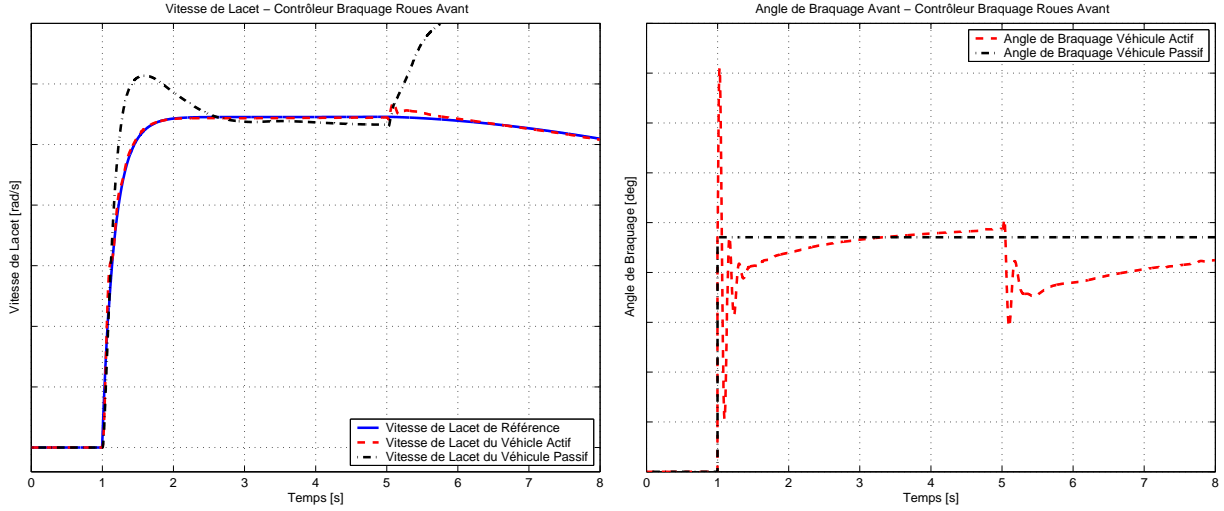


FIG. 5.9 – Résultats du véhicule avec et sans contrôleur sur le braquage des roues avant

Comme lors du cas précédent, il est possible d'obtenir un contrôleur réduit d'ordre 3 qui, avec les filtres conduit à un correcteur complet d'ordre 6. La forme des contrôleurs est donc la suivante⁴ :

$$K_{AR}(s) = \frac{\alpha_{1AR}s^3 + \alpha_{2AR}s^2 + \alpha_{3AR}s + \alpha_{4AR}}{\beta_{1AR}s^3 + \beta_{2AR}s^2 + \beta_{3AR}s + \beta_{4AR}} \quad (5.14)$$

Le contrôleur complet est donc sous la forme

$$K_a(s) = W_1(s) K_{AR}(s) W_2(s) \quad (5.15)$$

La figure 5.10 montre les réponses fréquentielles du contrôleur d'ordre plein et de celui d'ordre réduit, pour les quatre sommets du trapèze.

La figure 5.11 montre l'évolution en fonction de la vitesse de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte corrigé et celle du système en boucle fermée. Il est facile de s'apercevoir que le contrôleur d'ordre réduit permet d'obtenir des performances qui sont équivalentes à celles obtenues avec le contrôleur d'ordre plein.

De façon similaire au cas du braquage avant il est possible maintenant d'évaluer la performance sur un simulateur. Sur la figure 5.13, on trouve la vitesse de lacet du véhicule avec système de contrôle de la trajectoire et celle du véhicule sans aucun système de contrôle, ainsi que l'angle de braquage demandé par le contrôleur aux roues arrières.

La loi développée a pour but de rejeter la perturbation. C'est pour cette raison que nous avons décidé de reproduire sur la figure 5.12, les réponses fréquentielles de la fonction de transfert F_{rAR} .

4. les coefficients des polynômes ne sont pas donnés pour des raisons de confidentialité

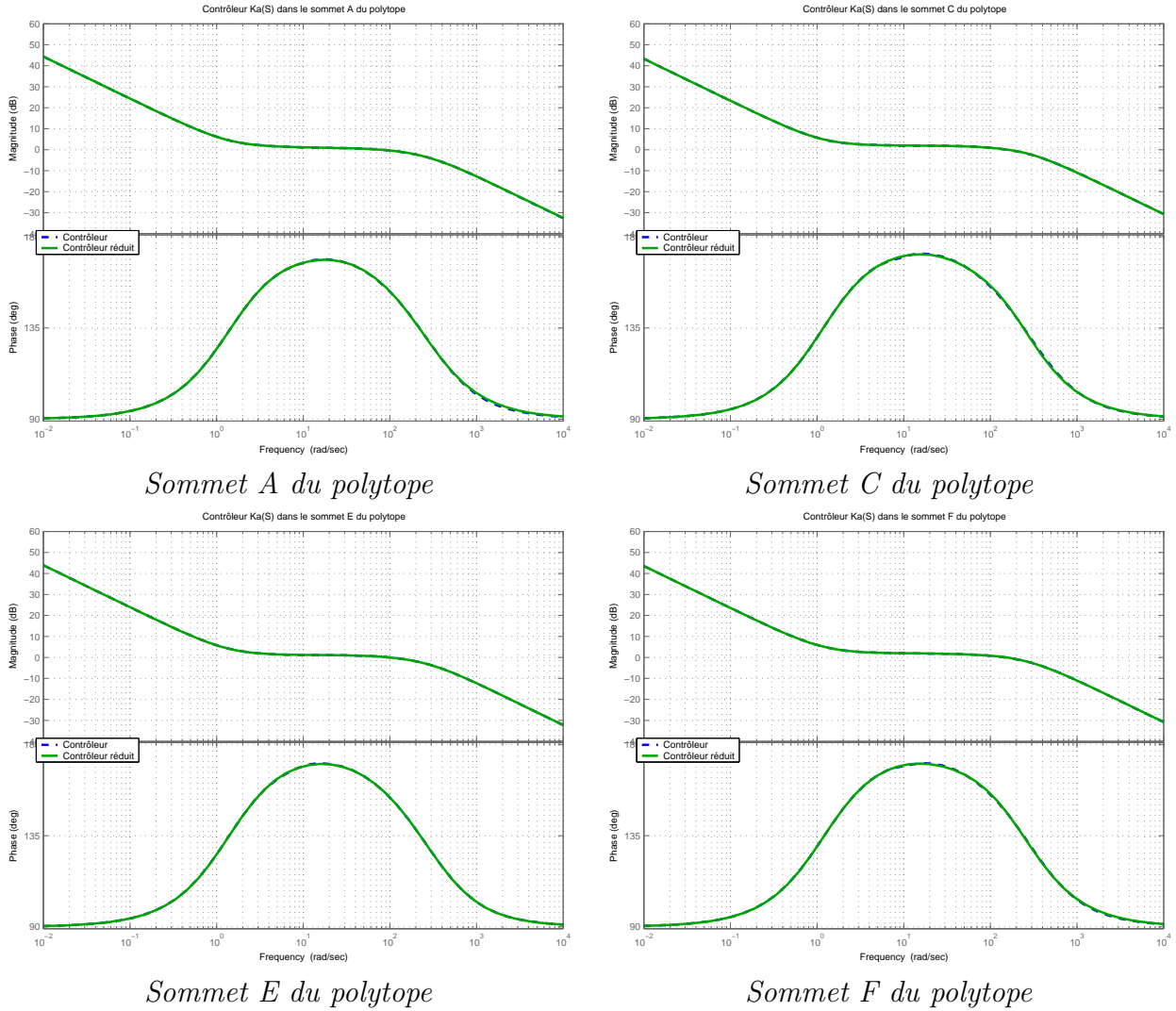


FIG. 5.10 – Réponse fréquentielle des contrôleurs de braquage arrière

$$F_{r_{AR}} = \frac{G(s)}{1 + G(s)K_a(s)}$$

Nous pouvons retrouver le même comportement observé précédemment sur la figure 5.8 sur la figure 5.12. Nous constatons la présence d'un intégrateur à basse fréquence et nous voyons aussi que la fonction $F_{r_{AR}}$ est loin de 0 dB. Nous en déduisons donc que le système peut bien rejeter les perturbations sur la commande. Dans ce cas la perturbation que nous pouvons rejeter est une perturbation intervenant au niveau de l'actionneur.

Les résultats obtenus pour le braquage arrière sont satisfaisants comme ceux obtenus précédemment pour le braquage avant. Il est aussi intéressant de constater (figure 5.13 - pag. 87) que l'angle demandé aux roues arrière est physiquement réalisable avec les actionneurs qui sont aujourd'hui disponibles.

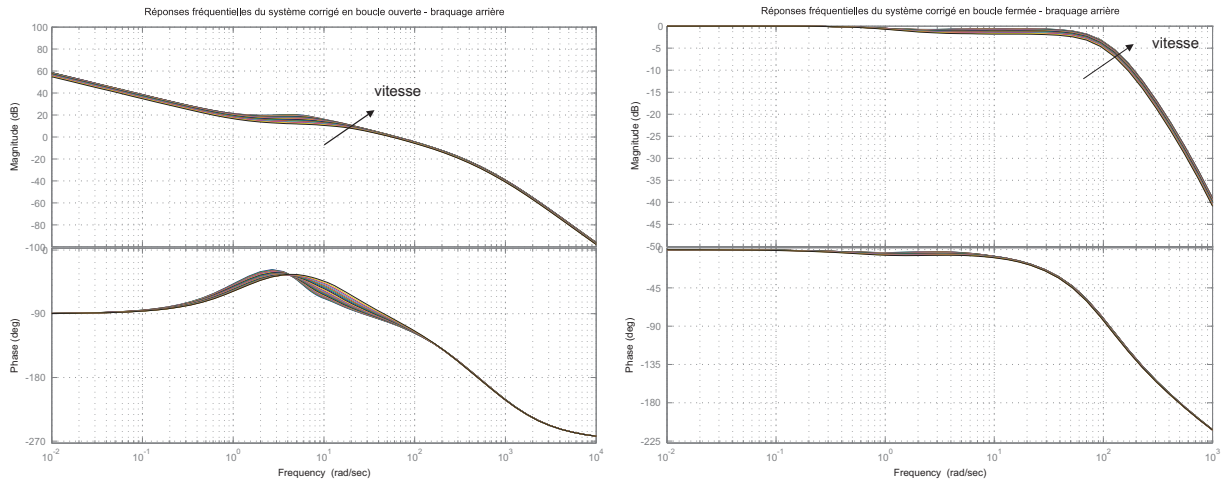


FIG. 5.11 – Réponse fréquentielle du système en boucle ouverte et fermée - braquage roues arrière

Définition du contrôleur pour le carrossage des trains

Lorsque nous regardons les équations modélisant le pneumatique, nous pouvons voir que l'effort latéral du pneumatique peut être modifié soit en agissant sur son angle de braquage soit en agissant sur son angle de carrossage (Figure 5.14).

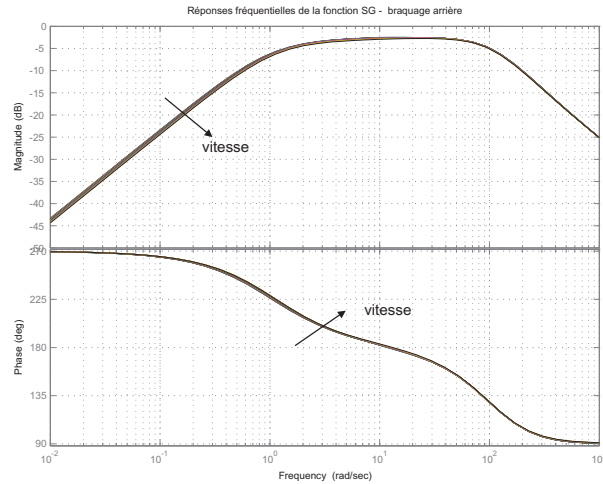
Nous avons donc décidé de regarder les performances atteignables avec des actionneurs capables de piloter l'angle de carrossage des trains d'un véhicule.

Ce type d'action n'est pas trop répandue dans les véhicules automobiles où on fait tourner le véhicule de préférence en agissant sur le braquage des roues. Néanmoins un véhicule présente toujours du carrossage non nul à l'arrêt pour deux raisons essentielles. Premièrement lors des manoeuvres, principalement en basse vitesse, la présence du carrossage augmente la force latérale et donc permet d'augmenter la maniabilité du véhicule. Deuxièmement lorsque le véhicule est chargé, la présence d'un carrossage négatif permet de faire travailler correctement les pneumatiques. L'angle de carrossage reste de toute façon très faible dans les automobiles : les constructeurs acceptent aujourd'hui une variation de l'angle de carrossage de l'ordre de 2° à 3° et les pneumatiques peuvent accepter jusqu'à 8° de carrossage.

En regardant les caractéristiques des pneumatiques utilisés dans les automobiles, il est possible de s'apercevoir que la rigidité de dérive est jusqu'à 10 fois plus importante que celle du carrossage.

Vue la rigidité de carrossage très faible dans les pneumatiques automobile, il est impossible de corriger le moment de lacet en utilisant seulement le carrossage actif sur le train avant. C'est pour cette raison que nous avons décidé de réaliser une loi de commande permettant d'intervenir sur les carrossages des deux trains.

Nous considérons deux commandes : une pour piloter le carrossage du train avant et une


 FIG. 5.12 – Réponse fréquentielle de la fonction $F_{r_{AR}}$ - braquage roues arrière

autre pour piloter le carrossage du train arrière. Comme pour les contrôleurs agissant sur les braquages des roues, nous présentons d'abord la structure de filtre de pré- et de post- compensation :

$$W_1^{\gamma_{AV}}(s) = 0,15 \frac{1000}{s + 1000}$$

$$W_1^{\gamma_{AR}}(s) = 0,15 \frac{1000}{s + 1000}$$

$$W_2(s) = \frac{100}{s} \frac{100}{s + 100}$$

Les filtres $W_1^{\gamma_{AV}}(s)$, $W_1^{\gamma_{AR}}(s)$ et $W_2(s)$ ont été choisis de façon à utiliser tout l'angle de carrossage disponible sur le pneumatique. Il est important de souligner que cette valeur ne peut pas être atteinte dans un véhicule classique vu qu'il n'y a pas suffisamment d'espace ; cette limitation n'a pas été prise en compte lors de la simulation.

L'ordre des contrôleurs aux sommets du polytope est là aussi un peu élevé : chacun des contrôleurs est d'ordre 8. Comme lors des synthèses précédentes une réduction utilisant les valeurs singulières de Hankel de la factorisation première est utilisée.

Les contrôleurs centraux dans les sommets peuvent ainsi être réduits à un ordre 3, ce qui implique que le contrôleur final est d'ordre 7 vu qu'il est nécessaire d'ajouter les filtres utilisés lors de la synthèse. La forme des contrôleurs est donc la suivante⁵ :

5. les coefficients des polynômes ne sont pas donnés pour des raisons de confidentialité

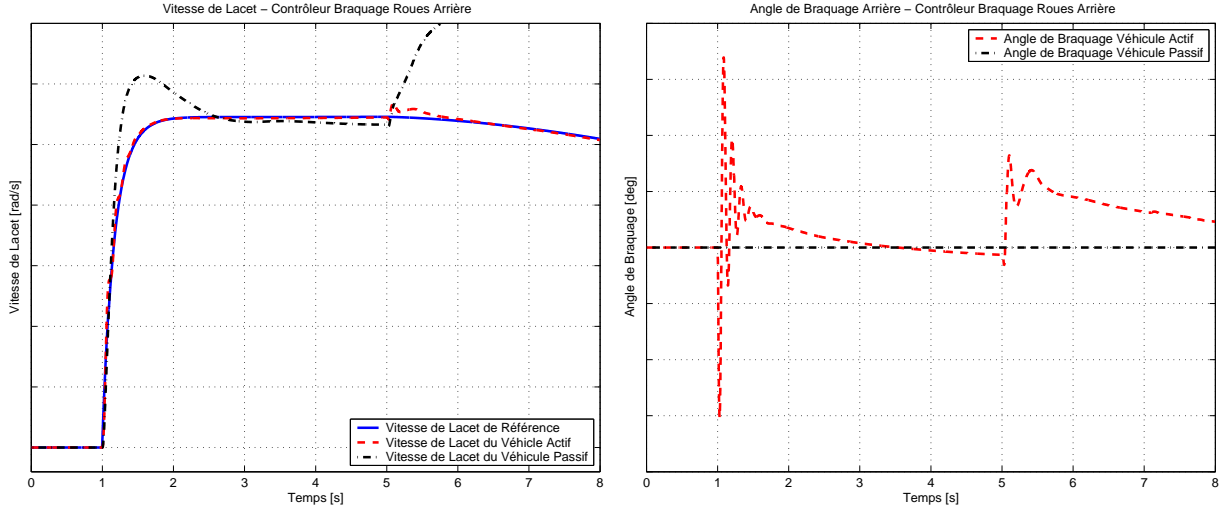


FIG. 5.13 – Résultats du véhicule avec et sans contrôleur sur le braquage des roues arrière

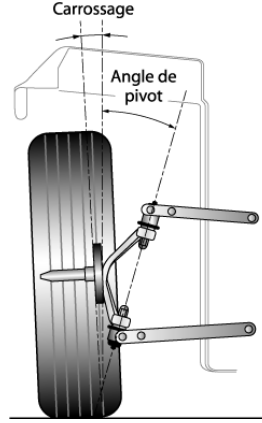


FIG. 5.14 – Angle de carrossage

$$K_{\gamma}(s) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_{1\gamma_{AV}} s^3 + \alpha_{2\gamma_{AV}} s^2 + \alpha_{3\gamma_{AV}} s + \alpha_{4\gamma_{AV}}}{\beta_{1\gamma_{AV}} s^3 + \beta_{2\gamma_{AV}} s^2 + \beta_{3\gamma_{AV}} s + \beta_{4\gamma_{AV}}} \\ \frac{\alpha_{1\gamma_{AR}} s^3 + \alpha_{2\gamma_{AR}} s^2 + \alpha_{3\gamma_{AR}} s + \alpha_{4\gamma_{AR}}}{\beta_{1\gamma_{AR}} s^3 + \beta_{2\gamma_{AR}} s^2 + \beta_{3\gamma_{AR}} s + \beta_{4\gamma_{AR}}} \end{array} \right\} \quad (5.16)$$

Le contrôleur complet est donc sous la forme

$$K_a(s) = W_1(s) K_{\gamma}(s) W_2(s) \quad (5.17)$$

Les réponses fréquentielles des contrôleurs complets d'ordre plein et de ceux d'ordre réduit sont reportées sur la figure 5.15, tandis que l'évolution en fonction de la vitesse de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte corrigé et celle du système en boucle fermée est donnée sur la figure 5.16. Il est facile de s'apercevoir que le contrôleur d'ordre réduit permet d'obtenir des performances équivalentes à celles obtenues avec le contrôleur d'ordre plein.

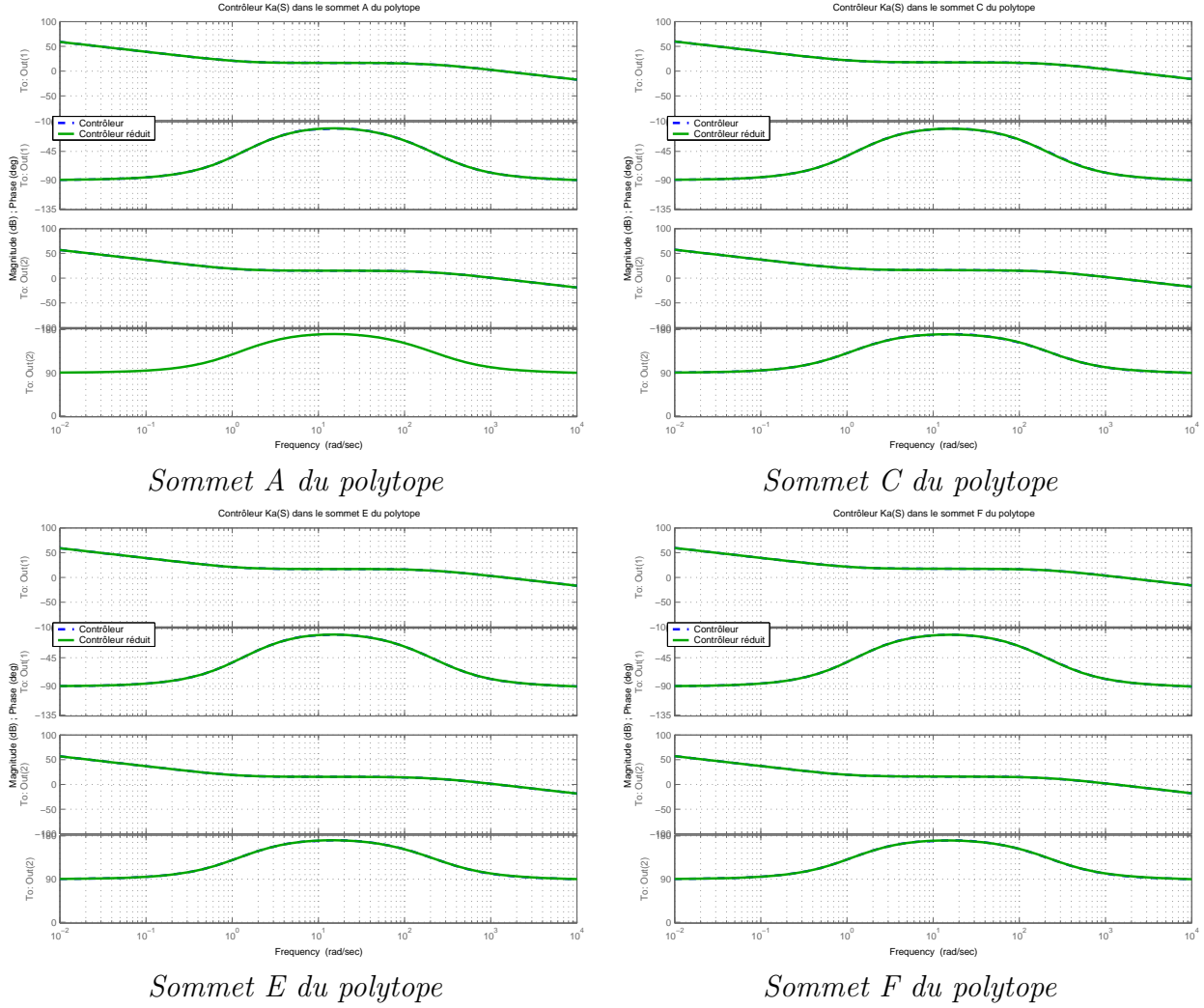


FIG. 5.15 – Réponse fréquentielle des contrôleurs par carrossage

La loi développée a pour but de rejeter la perturbation. C'est pour cette raison que nous avons décidé de reproduire sur la figure 5.17, les réponses fréquentielles de la fonction de transfert $F_{r_{car}}$.

$$F_{r_{car}} = \frac{G(s)}{1 + G(s)K_a(s)}$$

Nous pouvons retrouver le même comportement observé précédemment sur les figures 5.8 et 5.12 sur la figure 5.17. Nous constatons la présence d'un intégrateur à basse fréquence et nous voyons aussi que la fonction $F_{r_{car}}$ est loin de 0 dB. Nous en déduisons donc que le système peut bien rejeter les perturbations sur la commande. Dans ce cas la perturbation que nous pouvons rejeter est une perturbation intervenant au niveau de l'actionneur.

De façon similaire au cas des braquages, il est possible maintenant d'évaluer la performance sur un simulateur. Sur la figure 5.18, on trouve la vitesse de lacet du véhicule avec système de contrôle de la trajectoire et celle du véhicule sans aucun système de contrôle, ainsi que les

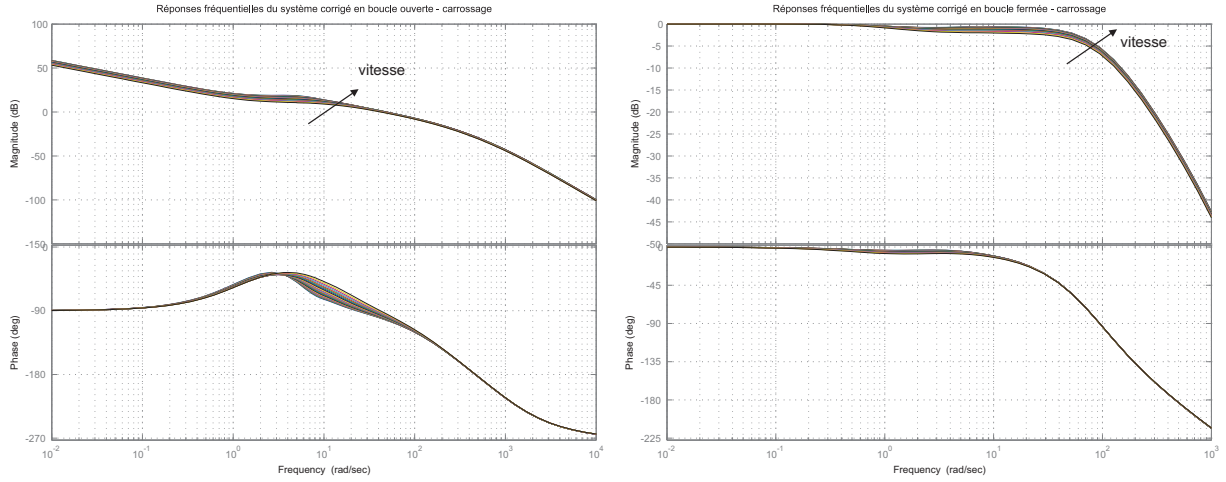
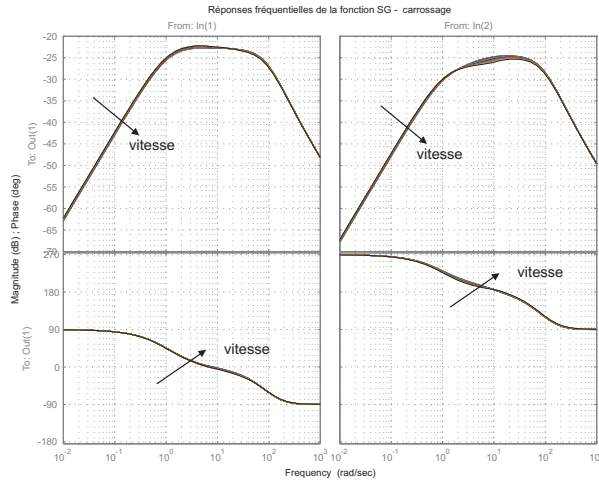


FIG. 5.16 – Réponse fréquentielle des contrôleurs par carrossage en boucle ouverte et fermée

FIG. 5.17 – Réponse fréquentielle de la fonction $F_{r_{car}}$ - carrossage

angles de carrossage des deux trains.

Conclusions sur le plan de roues

En regardant les performances obtenues par les deux contrôleurs de braquage, il est possible de constater d'abord que ces deux contrôleurs ont une activité sur les actionneurs très semblable et que les angles demandés sont presque identiques.

Il est aussi évident que lors de la mise en virage les performances sont équivalentes, vu que le train arrière n'est pas trop sollicité et loin de l'instabilité. Par contre, en observant de plus près les vitesses de lacet, il est possible de constater que l'erreur obtenue avec un contrôleur agissant sur le braquage des roues avant est plus petite que celle obtenue avec un contrôleur

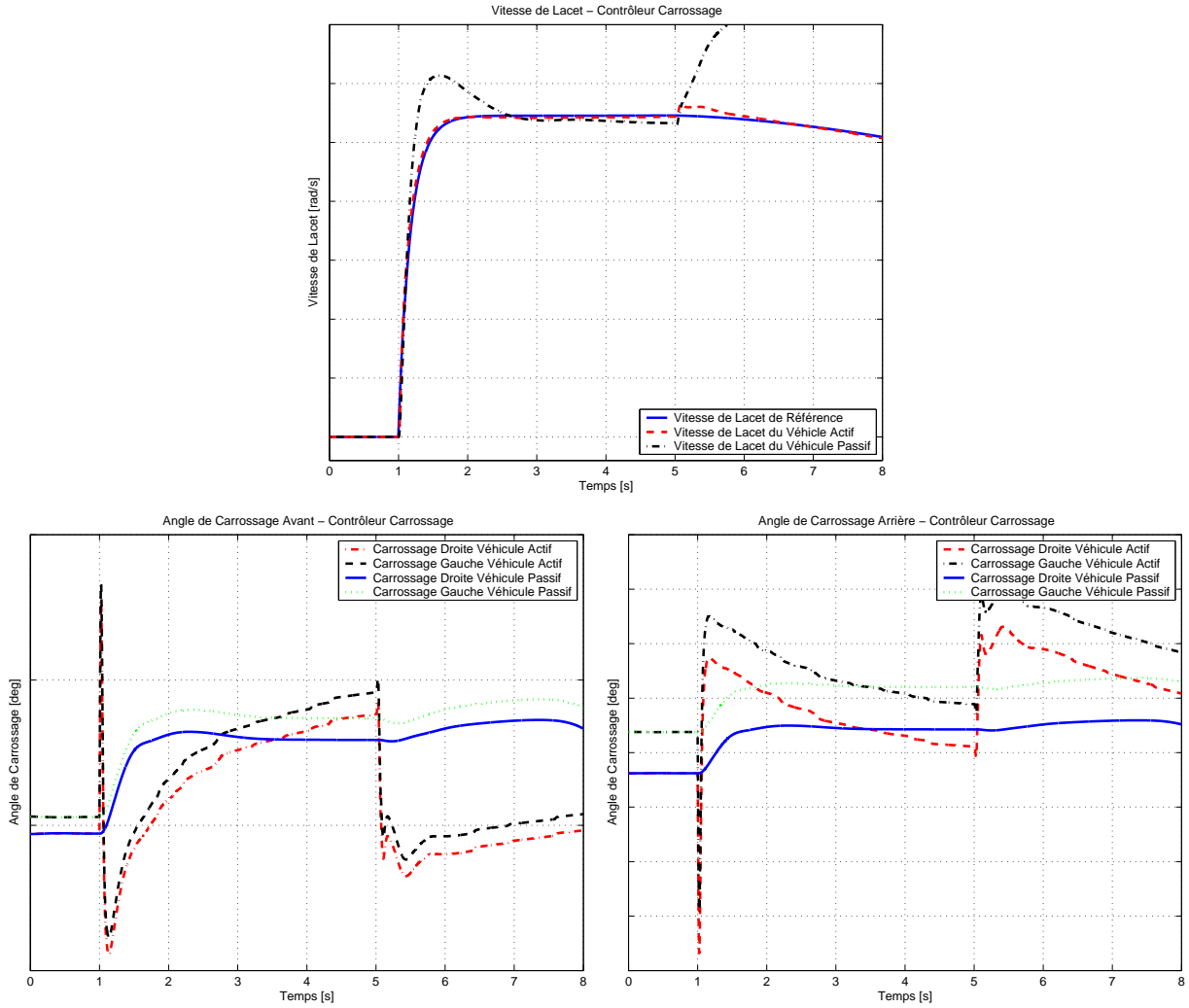


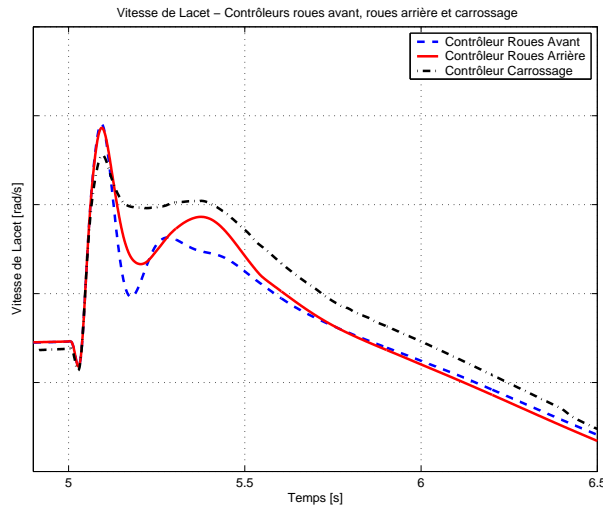
FIG. 5.18 – Résultats du véhicule avec et sans contrôleur sur le carrossage

agissant sur le braquage arrière (figure 5.19).

Ce phénomène est généré du fait que lors du freinage la charge sur le train arrière est plus faible. La possibilité de générer un effort en utilisant un braquage sur les roues arrière est donc réduite.

Un phénomène équivalent peut se produire aussi pour le train avant, lorsque c'est le train avant qui est déchargé suite par exemple à une accélération. Dans ce cas les roues avant pourront passer un effort inférieur à celui des roues arrière et il sera possible d'observer qu'une correction agissant sur les roues arrière sera plus efficace que celle agissant sur le braquage des roues avant.

Pour conclure, nous pouvons dire que le braquage des roues avant est intéressant lorsque le véhicule est dans une situation de sur-virage, tandis que le braquage des roues arrière est intéressant lorsque le véhicule est en sous-virage.

FIG. 5.19 – *Analyse comparative entre les contrôleurs*

Lorsque nous nous intéressons aux performances obtenues en utilisant le carrossage actif sur les deux trains, il est possible de constater que les performances de mise en virage sont satisfaisantes et qu'elles sont équivalentes à celles obtenues en utilisant des contrôleurs agissant sur les angles de braquage des trains.

La performance relative au freinage en virage est sans doute un peu plus dégradée que celles obtenues avec les angles de braquage. Il est aussi nécessaire d'observer que la loi de commande pour le carrossage a presque atteint la limite physique du pneumatique. Elle ne sera donc pas capable de corriger un freinage en virage plus violent.

Nous avons de toute façon constaté qu'une correction portant sur les angles de carrossage permet d'avoir des performances satisfaisantes. Le fait d'agir sur le carrossage permet aussi de réduire la dérive du pneumatique et donc permet d'avoir un véhicule plus sûr.

Il est néanmoins vrai qu'il n'est pas possible de rejeter de grosses perturbations en utilisant le carrossage vues les caractéristiques des pneumatiques. Pour pouvoir rejeter des perturbations plus importantes avec le contrôle du carrossage, il serait nécessaire de modifier la structure des pneumatiques et des trains. Les premiers devront avoir une rigidité de carrossage plus importante pour permettre au carrossage d'avoir une influence majeure sur le comportement latéral du véhicule. Ils devront, par exemple, ressembler aux pneumatiques de motocyclette qui sont capables d'accepter un grand angle de carrossage. Les deuxièmes de leur côté devront être aménagés pour permettre aux roues de prendre des angles de carrossage plus grands.

Par la suite nous n'utilisons plus l'action des angles de carrossage pour corriger le moment de lacet du véhicule, vu que pour l'instant elle est difficilement implantable dans un véhicule. Nous voulons néanmoins souligner son intérêt, vu qu'en agissant sur le carrossage il est possible d'agir aussi sur le comportement longitudinal du véhicule, par exemple, en modifiant sa

distance d'arrêt.

5.2.4 Contrôle avec freinage

Dans les paragraphes précédents nous nous sommes intéressés au contrôle du moment de lacet en utilisant le contrôle du plan de roue. Sans doute ces systèmes sont en train de s'installer dans le véhicule automobile, cependant lorsque nous regardons les systèmes de suivi de trajectoire qui sont aujourd'hui utilisés, il est possible de constater que la plupart est constituée de systèmes agissant sur le freinage.

C'est pour cette raison que nous avons décidé de consacrer une partie de ce mémoire au développement d'une loi capable de piloter la pression des étriers pour fournir un moment de lacet au véhicule afin de contrôler son comportement en lacet.

L'intérêt d'utiliser ce type d'actionneur pour le contrôle du moment de lacet est dicté par deux raisons principales. D'abord la rapidité de l'actionneur peut permettre de corriger plus rapidement et parfois avec de meilleures performances des perturbations qui sont parfois très importantes. En second lieu l'effet de l'actionneur sur la vitesse du véhicule est souvent bénéfique du point de vue de la sécurité : elle permet de réduire l'influence de la perturbation sur le véhicule.

Comme pour les contrôleurs qui ont été présentés précédemment, nous donnons tout d'abord les filtres de pré- et de post- compensation qui ont été utilisés pour réaliser la loi de commande permettant de contrôler la mise en virage et le freinage léger en virage :

$$W_1^{\text{AV}}(s) = 2000 \frac{1000}{s + 1000} \quad W_1^{\text{AR}}(s) = 1000 \frac{1000}{s + 1000}$$

$$W_2(s) = \frac{100}{s} \frac{100}{s + 100}$$

En regardant les filtres choisis, il est possible de constater que nous avons décidé de freiner davantage les roues avant et que nous voulons fournir un effort de freinage de l'ordre de 2000 [N]. En traduisant cet effort en couple on s'aperçoit que nous demandons au contrôleur un couple de l'ordre 600 [N/m] sur les roues avant et de 300 [N/m] sur les roues arrière. Les pressions de freinage il est possible de constater que la pression sera de l'ordre de 30 [bars] sur les deux trains. Par contre les bandes passantes des filtres et l'erreur acceptée sont toujours choisies selon l'approche présentée lors de la synthèse du contrôleur de braquage avant.

Ici aussi nous avons décidé de réduire l'ordre du contrôleur. Les contrôleurs "centraux" sur les sommets du polytope sont d'ordre 9. En utilisant la méthode de réduction par les valeurs singulières de Hankel de la factorisation première [Pal03], il est possible d'obtenir des contrôleurs réduits d'ordre 3 qui associés avec les filtres donneront des contrôleurs d'ordre 9. La forme des contrôleurs est donc la suivante⁶ :

6. les coefficients des polynômes ne sont pas donnés pour des raisons de confidentialité

$$K_{fre}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{1freAV}s^3 + \alpha_{2freAV}s^2 + \alpha_{3freAV}s + \alpha_{4freAV}}{\beta_{1freAV}s^3 + \beta_{2freAV}s^2 + \beta_{3freAV}s + \beta_{4freAV}} \\ \frac{\alpha_{1freAR}s^3 + \alpha_{2freAR}s^2 + \alpha_{3freAR}s + \alpha_{4freAR}}{\beta_{1freAR}s^3 + \beta_{2freAR}s^2 + \beta_{3freAR}s + \beta_{4freAR}} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Le contrôleur complet est donc sous la forme

$$K_a(s) = W_1(s) K_{fre}(s) W_2(s) \quad (5.19)$$

Les réponses fréquentielles des contrôleurs aux sommets sont données sur la figure 5.20.

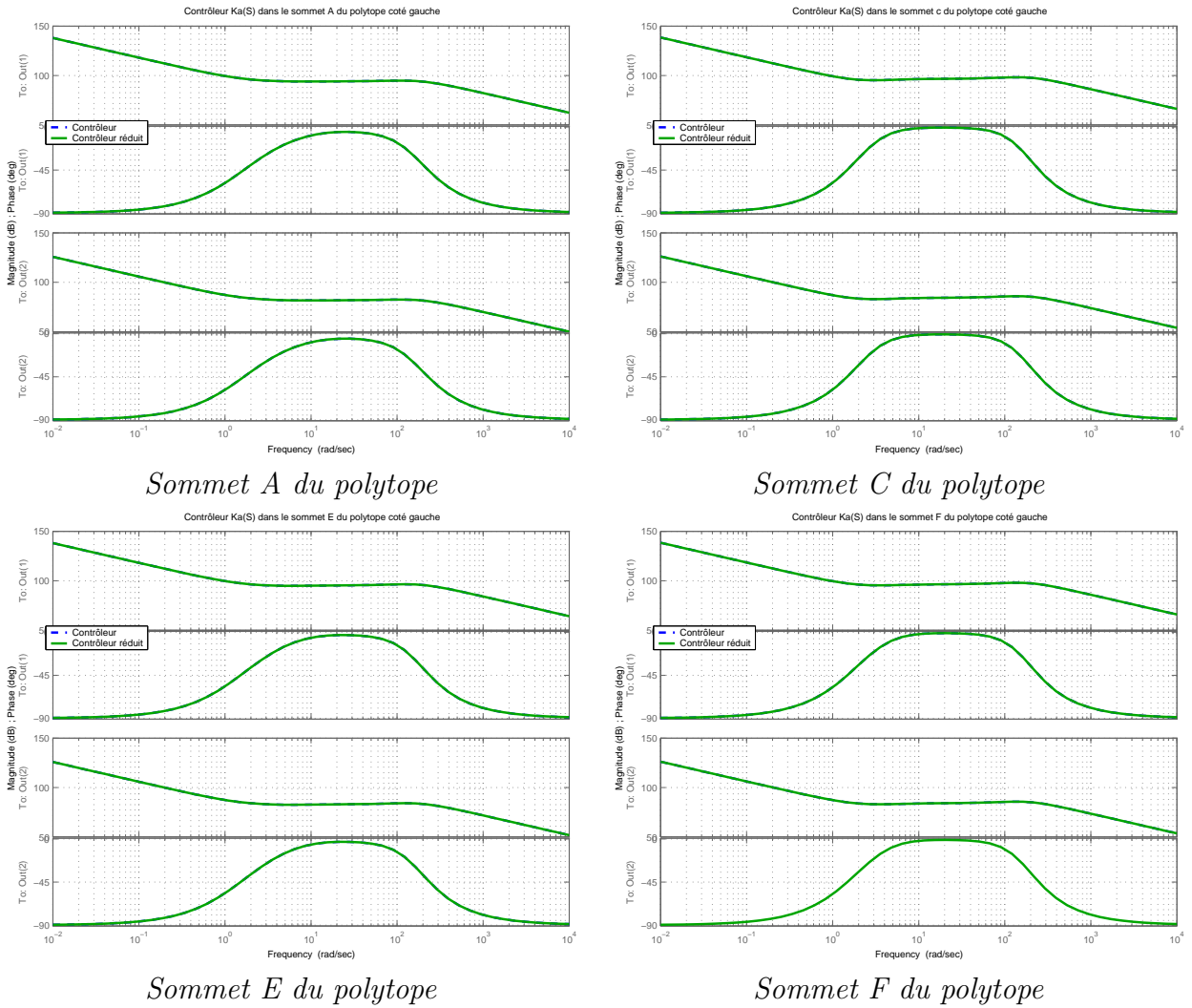


FIG. 5.20 – Réponse fréquentielle des contrôleurs par freinage

Les réponses fréquentielles en fonction de la vitesse de la boucle ouverte corrigée et de la boucle fermée sont données sur la figure 5.21. Il est possible de constater que les contrôleurs d'ordre réduit sont capables d'assurer les mêmes performances que les contrôleurs d'ordre plein. Les diagrammes de Bode du coté droit sont en opposition de phase par rapport à ceux du coté

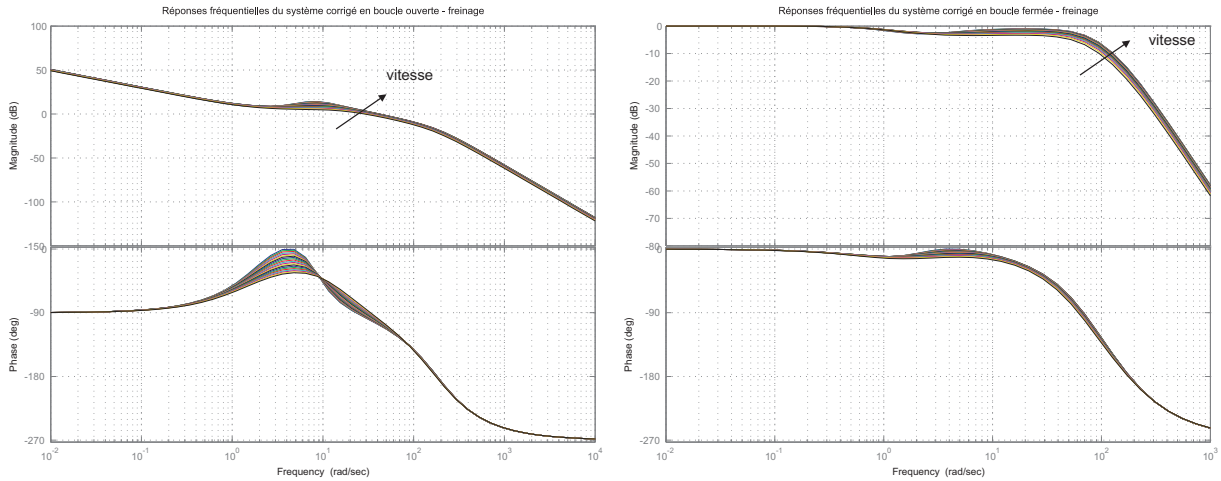


FIG. 5.21 – Réponse fréquentielle des systèmes utilisant le freinage en boucle ouverte et fermée

gauche ceux-ci dérive logiquement de la structure des équations.

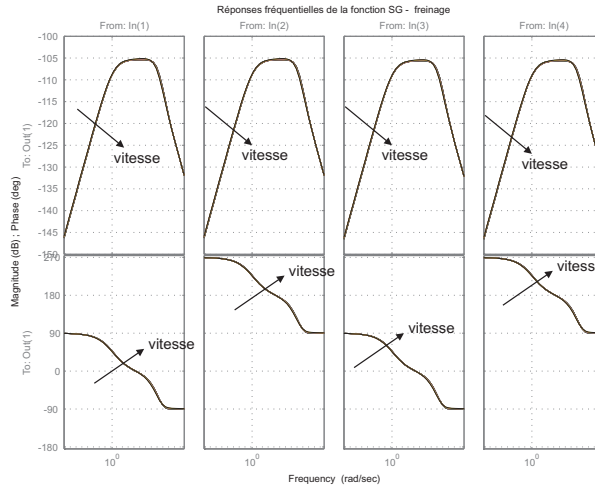
La loi développée a pour but de rejeter la perturbation. C'est pour cette raison que nous avons décidé de reproduire sur la figure 5.22, les réponses fréquentielles de la fonction de transfert $F_{r_{fre}}$.

$$F_{r_{fre}} = \frac{G(s)}{1 + G(s)K_a(s)}$$

Nous pouvons retrouver le même comportement observé précédemment sur les figures 5.8, 5.12 et 5.17 sur la figure 5.22. Nous constatons la présence d'un intégrateur à basse fréquence et nous voyons aussi que la fonction $F_{r_{fre}}$ est loin de 0 dB. Nous en déduisons donc que le système peut bien rejeter les perturbations sur la commande. La perturbation que nous pouvons rejeter est ici soit une action du conducteur sur la pédale du frein et donc du circuit de freinage, soit une perturbation intervenant au niveau de l'actionneur qui se produit typiquement lorsque l'effort transmit au sol n'est pas cohérent avec celui prévu par le modèle linéaire que nous avons utilisé pour calculer la loi de commande.

Pour conclure, nous reportons sur la figure 5.23 les résultats obtenus pour la mise en virage et le freinage léger en virage avec un véhicule équipé d'un contrôleur de moment de lacet et ceux obtenus pour un véhicule passif.

En observant la vitesse de lacet du véhicule, il est possible de constater que les performances de mise en virage et de freinage en virage sont satisfaisantes. En observant les couples de freinage appliqués sur les deux cotés du véhicule, il est possible de constater que l'algorithme ne modifie pas la consigne demandée par le conducteur, mais il effectue seulement une répartition du couple pour asservir le véhicule selon la vitesse de lacet de référence.

FIG. 5.22 – Réponse fréquentielle de la fonction $F_{r_{fre}}$ - freinage

Observations sur le freinage et la répartition des pressions Nous avons indiqué que les filtres ont été choisis de façon à utiliser davantage le freinage du train avant. Ceci paraît totalement normal : l'action de freinage peut ne pas avoir beaucoup d'influence sur le train arrière vu que les manoeuvres choisies ont pour objectif de saturer le train arrière et de rendre la voiture survireuse.

De façon similaire, lorsque le véhicule a tendance à être sousvireur, il est intéressant de freiner davantage le train arrière vu que le train avant aura tendance à saturer. Lors de l'utilisation d'un contrôleur sur le freinage, certaines observations sont néanmoins nécessaires. La loi synthétisée est supposée travailler en couple. Il est donc évident que pour contrôler le moment de lacet du véhicule, il y aura des couples positifs sur un coté et des couples négatifs sur l'autre.

Les couples négatifs sont proportionnels aux pressions de freinage selon un coefficient multiplicatif lié à l'efficacité des plaquettes et des disques. Les couples négatifs sont donc applicables sans problème au véhicule.

Lorsque nous avons un couple positif, deux situations différentes sont envisageables : la première est la réduction du freinage, tandis que la deuxième est l'accélération de la roue. Dans le premier cas le couple de correction a pour but seulement de réduire le couple de freinage. Cette opération est de réalisation simple et elle a besoin de la même technologie que pour un couple négatif.

Par contre lorsque le couple total appliqué à la roue est positif (cas d'accélération de la roue) la structure actuelle du véhicule n'est plus suffisante. L'action de commande aura besoin d'un actionneur qui soit capable de piloter directement le couple moteur de chacune des roues. Ces actionneurs ne sont pas disponibles dans les véhicules actuels : le couple est passé de façon identique sur les roues du même train. Cependant dans certains cas des moteurs électriques sont installés sur les roues pour pouvoir fournir des couples positifs.

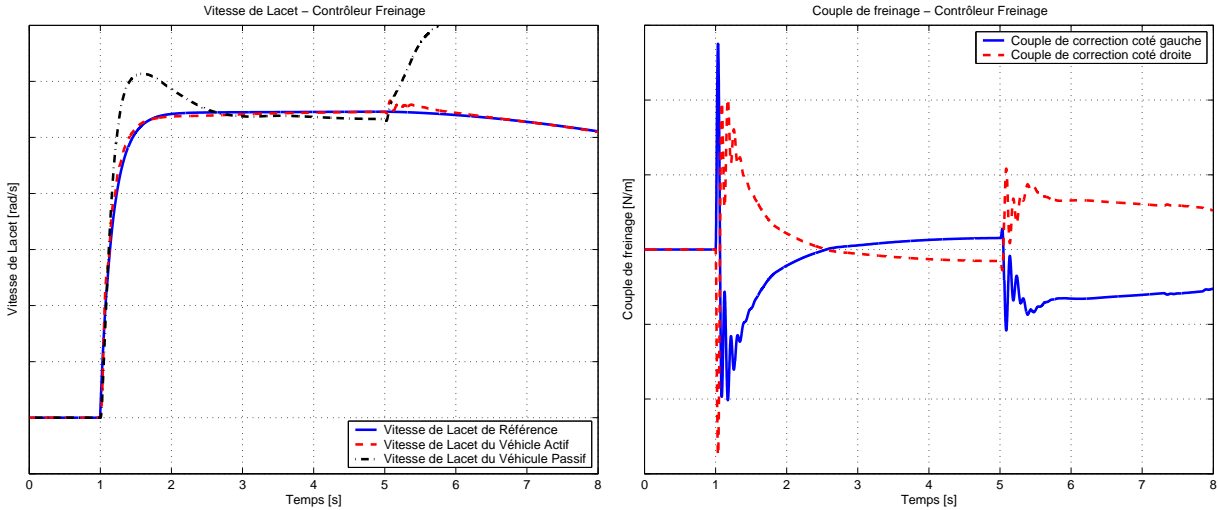


FIG. 5.23 – Résultats du véhicule avec et sans contrôleur sur le freinage

Vu que nos lois sont censées agir sur un véhicule classique, nous pouvons seulement modifier la pression de freinage des étriers. Il est nécessaire d'effectuer une répartition pour pouvoir considérer la présence des couples positifs et des couple négatifs.

Avant d'introduire l'algorithme de répartition, il faut souligner que pour éviter le blocage des roues, un système ABS est supposé exister entre notre contrôleur du couple de freinage et les étriers. La présence de ce système nous permet de garantir le fait que l'effort de freinage passé est toujours équivalent à l'effort maximal disponible au pneumatique.

Un algorithme possible de répartition est donc le suivant :

Algorithme 5.2.4

I. Distribution des couples positifs et négatifs

- pour chaque roue calculer $C_{ij\text{corrigé}} = C_{ij\text{conducteur}} - C_{ij\text{contrôleur}}$
- saturer le couple $C_{ij\text{corrigé}}$ à 0
- effectuer la différence entre le couple corrigé et celui réalisable
 $C_{ij\text{reporté}} = (C_{ij\text{saturé}} - C_{ij\text{corrigé}})$.
- si $C_{ij\text{reporté}} \leq 0$ ajouter le couple non applicable sur l'autre roue du même essieu
 $C_{ij\text{finale}} = C_{ij\text{saturé}} + |C_{ij\text{reporté}}|$

II. Répartition de la pression restante

- calculer la pression de freinage $p_{ij\text{couple}} = kC_{ij\text{finale}}$
- ajouter la pression en excès $p_{\text{excèsin}}$ arrivant de l'autre roue située du même côté du véhicule : $p_{ij\text{demandée}} = p_{ij\text{couple}} + p_{\text{excèsin}}$
- envoyer la pression $p_{ij\text{demandée}}$ au bloc ABS qui fournira $p_{ij\text{ABS}}$ qui évite le blocage de la roue

- regarder s’il y a une différence entre la pression demandée et celle réalisée par l’ABS, si oui l’envoyer à l’autre roue située sur le même côté du véhicule :

$$p_{excès_{out}} = p_{ij_{ABS}} - p_{ij_{demandée}}$$

L’algorithme de répartition est constitué de deux parties principales : la première est dédiée à l’élimination des couple positifs, tandis que la deuxième est dédiée à l’optimisation de la distribution des pressions.

Dans la mise en place de notre algorithme nous avons considéré le fait que la pression de freinage du train arrière est inférieure à celle du train avant. Nous avons donc choisi des saturations en accord avec les pressions maximales acceptées sur les trains.

Avant de continuer il est important de rappeler que les lois réalisées ont pour objectif d’asservir la vitesse de lacet en utilisant les couples appliquées aux roues. Par contre, nous devons piloter les actionneurs en pression. Deux solutions sont possibles, la première est d’ajouter de la pression sur certains actionneurs et d’en enlever sur d’autres, la deuxième est d’en ajouter seulement.

Nous avons décidé d’utiliser la première solution. La deuxième solution est celle typiquement utilisée par les systèmes ESP, où la correction est effectuée par ajout de pression sur l’étrier qui doit freiner pour créer le moment de lacet souhaité. L’utilisation de cette deuxième solution peut aussi être envisagée, mais dans ce cas il est indispensable d’utiliser un système d’anti wind-up afin d’éviter que la loi de commande ne demande trop de pression au système ABS.

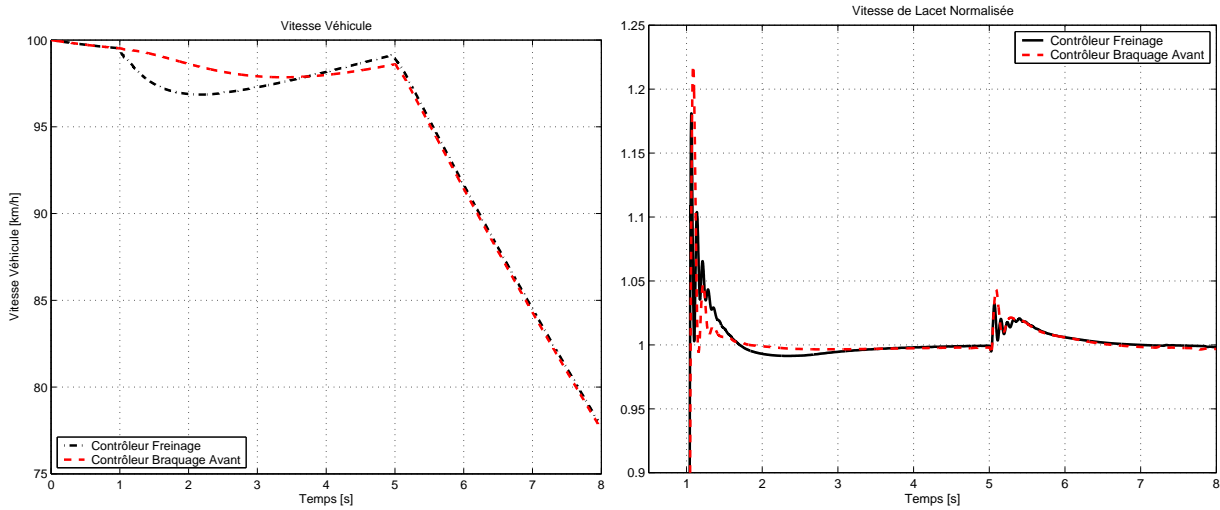
Analyse comparative de l’utilisation du braquage avant et du freinage

Dans les paragraphes précédents, nous avons analysé la correction lors de la mise en virage d’un véhicule et d’un freinage léger en virage en utilisant différents actionneurs. Parmi les actionneurs agissant sur le plan de la roue, celui qui intervient sur l’angle de braquage avant permet d’atteindre les meilleures performances.

Il est donc intéressant d’effectuer une comparaison entre ce contrôleur et celui agissant sur les couples de freinage. Pour effectuer cette analyse, nous avons choisi d’utiliser la vitesse du véhicule et sa vitesse de lacet normalisée lors de l’application de deux contrôleurs (Figure 5.24).

En observant d’abord les vitesses de lacet normalisées, il est possible de constater que le contrôleur agissant sur les couples de freinage permet d’avoir une erreur entre la vitesse de lacet et sa référence plus faible que celui obtenu avec le contrôleur agissant sur le braquage des roues avant. Ces résultats sont liés sans doute à la rapidité des actionneurs de freinage et à leur bande passante plus élevée. Cette capacité est à la base du développement très important des systèmes de contrôle de la trajectoire utilisant le freinage.

Néanmoins lorsque nous regardons l’évolution de la vitesse pendant les manoeuvres, il est possible de constater que la vitesse du véhicule équipé des actionneurs de freinage est équivalente


 FIG. 5.24 – *Vitesse du véhicule et Vitesse de lacet normalisée du véhicule*

pendant les manoeuvres à celle du véhicule équipé avec des actionneurs de braquage des roues avant. Il est donc possible de constater qu'effectivement la commande agissant sur le freinage effectue seulement une répartition du couple et il ne le change pas. Il est donc évident de voir la différence par rapport aux algorithmes classiques où le couple de freinage n'est pas seulement reparté, mais plutôt ajouter à la consigne du conducteur.

Cet exemple, très simple, nous a confirmé les affirmations faites dans les paragraphes précédents : le contrôle de trajectoire via le freinage permet d'avoir de meilleures performances au niveau de la vitesse de lacet, mais ceci au détriment de la vitesse de passage de la manoeuvre.

Avant d'introduire l'analyse de robustesse, nous voulons préciser certains aspects concernant les simulations présentées jusqu'à maintenant. En vue de l'intégration des lois de commande sur le véhicule, nous avons décidé d'effectuer la discrétisation du contrôleur agissant sur le freinage. Nous avons discrétisé seulement ce contrôleur parce qu'il était le seul pour lequel nous avons envisagé une essai sur véhicule. Nous avons choisi une fréquence d'échantillonnage de $100 [Hz]$ qui est une fréquence acceptée par l'ordinateur de bord et qui respecte le théorème de Shannon : elle est au moins deux fois supérieure à la bande passante de la boucle ouverte corrigée. Les contrôleurs ainsi obtenus ont été testés en simulation et ont donné des résultats équivalents aux correcteurs continus.

5.2.5 Analyse de robustesse

Les lois de commande ont été introduites lors des paragraphes précédents. Ici notre intérêt se porte sur l'analyse de la robustesse des lois par rapport aux incertitudes paramétriques.

Nous avons décidé de ne pas donner suite à l'utilisation de la loi de commande sur le carrossage actif donc ici nous regardons seulement la robustesse de la loi agissant sur le braquage avant, de celle qui intervient sur le braquage arrière et pour finir de celle qui utilise les couples

de freinage.

Définition des conditions d'analyse

Avant de présenter les résultats obtenus, il est nécessaire de définir les paramètres qui sont considérés comme incertains, lors de l'analyse de robustesse.

Nous avons décidé de choisir quatre paramètres incertains qui sont :

- la masse
- l'adhérence
- la position du centre de gravité
- la vitesse

Les autres paramètres, comme par exemple l'empattement, n'ont pas été retenus, parce qu'ils ont des valeurs très proches d'un véhicule à l'autre (d'un même modèle) et avec de faibles variations.

Les quatre autres sont, par contre, des paramètres qui peuvent subir de très grandes variations. Nous nous intéressons d'abord à la masse, il est évident que sa variation est très intrusive au niveau de la dynamique du véhicule : elle influence aussi bien le comportement longitudinal que le comportement latéral du véhicule.

Lorsque nous nous intéressons de plus près à la variation de la masse, il est possible de constater que la charge d'un véhicule influence la déformation des trains, les caractéristiques des pneumatiques, mais aussi la position du centre de gravité du véhicule. C'est sans doute pour cette raison que la choisir comme paramètre incertain est intéressant.

Le deuxième paramètre choisi est l'adhérence qui sans doute est la plus intrusive au niveau de la stabilité du véhicule. Elle agit directement sur les caractéristiques des pneumatiques et donc sur la capacité du véhicule à faire passer des efforts au sol.

Lorsque nous regardons la variation du centre de gravité, nous constatons d'abord que sa position est modifiée par la position de la masse dans le véhicule, mais aussi par les accélérations auxquelles le véhicule est soumis. La variation de l'emplacement du centre de gravité implique une modification des bras de levier agissant sur le moment de lacet et par conséquent de l'action du contrôleur.

Le dernier paramètre choisi est la vitesse. Le fait d'avoir choisi d'utiliser des lois de commande LPV doit nous garantir la robustesse vis-à-vis de ce paramètre. Néanmoins, nous l'avons considéré pour nous assurer de la robustesse du contrôleur lorsque la mesure de vitesse n'est pas trop précise. L'analyse de la robustesse sera réalisée en fonction de la vitesse. La valeur nominale de la vitesse est donc différente à chaque pas, c'est la raison pour laquelle dans la table 5.2 il n'y a pas de valeur nominale pour la vitesse.

TAB. 5.2 – Variations des paramètres analyse de robustesse pour le contrôle de lacet

Paramètre	Valeur de Synthèse (et Valeur Nominale)	Incertitudes
Masse	1750 <i>kg</i>	$\pm 250kg$
Adhérence	0,6	$\pm 0,4$
Vitesse		$\pm 10\%$
Déplacements CDG (latéral et longitudinal)		$\pm 10cm$

Nous avons introduit les raisons qui nous ont fait choisir les paramètres incertains. Nous voulons maintenant donner une rapide explication du choix des valeurs numériques.

- Masse : la valeur nominale est la masse du véhicule à vide. L'incertitude est supposée être équivalente au 15 % du poids du véhicule.
- Adhérence : ce paramètre varie normalement dans l'intervalle $[0,2 \div 1]$. La valeur nominale et l'incertitude sont donc calculées comme la valeur moyenne et l'écart des valeurs extrêmes par rapport à celle ci.
- Déplacement CDG : la variation considérée est calculée en considérant le véhicule lors de fortes accélérations longitudinales et latérales. La valeur nominale du déplacement est logiquement nulle.
- Vitesse : nous avons dit précédemment qu'un maillage de la vitesse est réalisé pour effectuer l'analyse de robustesse. Les valeurs nominales seront donc les points du maillage, tandis que les incertitudes sont choisies pour couvrir tout l'intervalle de vitesse.

Action sur le plan de la roue

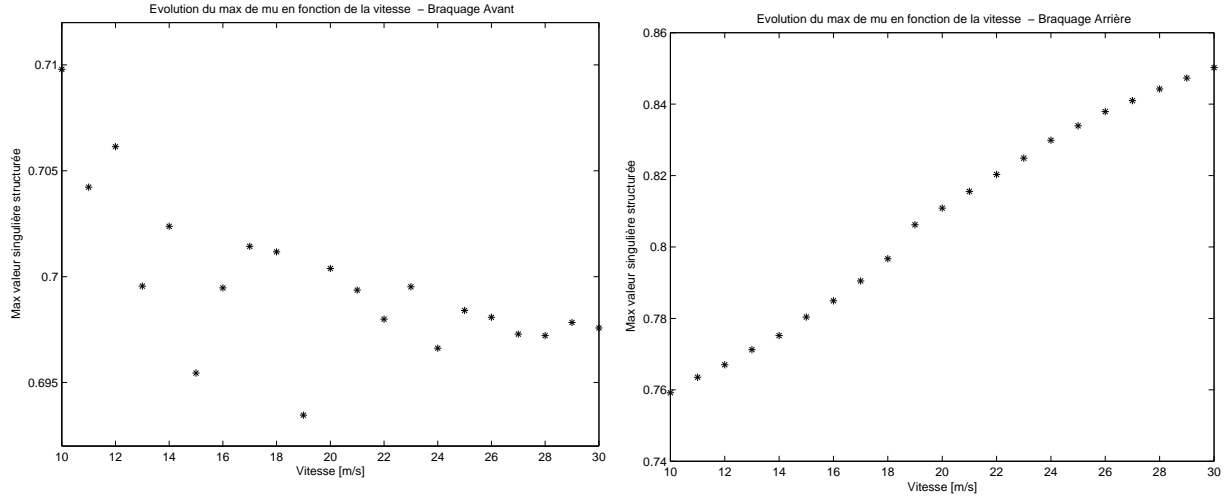
Nous pouvons donc effectuer l'analyse de robustesse des contrôleurs agissant sur le plan de roue. Il est d'abord nécessaire de définir le maillage. Nous avons décidé d'utiliser un pas de 1 *m/s*. Les résultats obtenus pour la robustesse des contrôleurs pour le braquage avant et pour le braquage arrière sont reportés sur la figure 5.25, où nous présentons les évolutions de la valeur maximale de la borne supérieure de μ en fonction de la vitesse V .

Nous rappelons au lecteur les points essentiels afin d'effectuer l'analyse de robustesse :

- définir les paramètres incertains et leurs incertitudes
- incorporer les incertitudes dans les équations
- construire la représentation d'état du modèle avec les incertitudes
- calculer la valeur singulière structurée

Un exemple complet d'analyse de robustesse est donné dans l'Annexe C.

Il est possible de constater que vis-à-vis des incertitudes choisies les contrôleurs obtenus avec la synthèse LPV sont robustes : le maximum de la valeur singulière structurée est toujours inférieur à 1. L'obtention d'une valeur inférieure à 1, nous garantit d'avoir un système robuste vis-à-vis des incertitudes choisies. Il est aussi possible d'affirmer que nous pouvons accepter des

FIG. 5.25 – Valeurs des maximum de μ en fonction de la vitesse

incertitudes équivalentes au produit entre les valeurs que nous avons choisies et l'inverse de la valeur singulière structurée. La différence entre la plus grande et la plus petite valeur de μ est, dans les deux cas, inférieure à 1%. Lorsque nous analysons les valeurs de μ obtenues dans le cas du braquage des roues arrière, il est possible de constater qu'elles sont supérieures à celles obtenues dans le cas du braquage avant. Cette différence est introduite par les dimensions du véhicule et par la position de son centre de gravité.

Action sur les freins

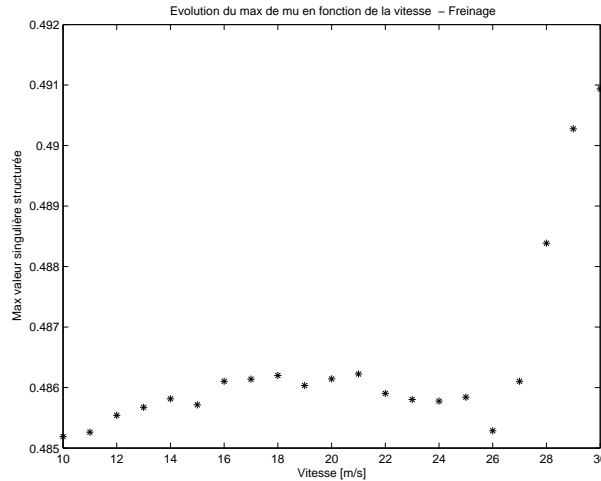
Il est aussi intéressant d'observer la robustesse du contrôleur agissant sur les freins. Nous avons décidé de considérer les mêmes incertitudes paramétriques lors de l'analyse de la robustesse du plan de roue (voir tableau 5.2), avec là aussi un calcul en fonction de la vitesse avec un pas de 1 m/s. Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 5.26.

Lorsque nous analysons la robustesse des lois agissant sur le freinage, il est possible de constater que le déplacement latéral du centre de gravité est plus pénalisant pour la robustesse que son déplacement longitudinal. Il est aussi évident que lors d'une manoeuvre nécessitant un contrôle de trajectoire de lacet le centre de gravité se déplacera davantage à cause du report de charge latéral et donc le déplacement latéral sera plus important que le déplacement longitudinal.

5.2.6 Conclusion

Lors des paragraphes précédents, nous avons introduit des lois de commande qui sont capables de contrôler le moment de lacet du véhicule.

Ces lois ont été basées sur les actionneurs qui sont aujourd'hui disponibles dans les véhicules routiers.

FIG. 5.26 – Valeurs des maximum de μ en fonction de la vitesse

Lors de cette analyse, il a été possible de constater que les trois lois proposées sont capables de fournir des performances satisfaisantes, chacune logiquement avec des points forts et des points faibles.

En analysant la robustesse, il est possible de voir que le contrôleur agissant sur le freinage présente des propriétés de robustesse plus importantes que celles obtenues par les autres contrôleurs. Cette caractéristique peut sans doute être intéressante par la suite : il est envisageable de corriger les grosses perturbations du moment de lacet avec le freinage plutôt qu'en utilisant les autres actionneurs.

Vues les caractéristiques des différents actionneurs, il est possible de proposer des solutions utilisant des combinaisons des contrôleurs qui ont été présentés dans les paragraphes précédents. Dans la suite de ce mémoire nous analysons des combinaisons possibles de contrôleurs pilotant un seul actionneur à la fois, mais aussi les solutions avec des contrôleurs capables de piloter plusieurs actionneurs.

Pour conclure, nous voulons rappeler que dans certains cas, comme il est montré par la suite, le contrôle du moment de lacet est aussi possible avec l'utilisation des suspensions actives. Néanmoins cette solution se révélera moins intéressante que les précédentes.

5.3 Contrôle du roulis

5.3.1 Etude bibliographique

Lors du paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés au contrôle de la dynamique latérale du véhicule. C'était donc une série de contrôleurs s'intéressant d'avantage à la sécurité

du véhicule. Dans cette partie nous voulons regarder avec plus d'intérêt le confort des passagers, c'est pour cette raison que le contrôle du roulis est considéré.

Dans la plupart des cas le contrôle du roulis reste une performance d'agrément de conduite, néanmoins il peut s'avérer très important aussi dans le cadre de la sécurité.

Le contrôle du roulis d'un véhicule est un sujet étudié depuis plusieurs années. Un exemple très simple est celui présenté dans [Cec00]. Dans ce papier l'auteur propose d'utiliser une structure avec un actionneur sur le train avant et un sur le train arrière. Ces actionneurs sont placés entre les barres anti-roulis et les points d'attaches sur les roues (une roue pour chaque train). L'actionneur sur le train avant est placé sur un coté du véhicule, tandis que celui du train arrière est placé sur le coté opposé. Les deux actionneurs sont contrôlés par une valve hydraulique. Cette solution est utilisée lorsque le véhicule est équipé de suspensions passives. La mesure du roulis est effectuée en utilisant un système positionné sur le train avant du véhicule. La force appliquée aux actionneurs est calculée en utilisant un contrôleur proportionnel dérivateur ayant comme entrée la différence entre le déplacement de la masse suspendue et le déplacement des roues. Une deuxième solution est proposée en utilisant cette fois-ci des suspensions actives. Dans ce cas sur chaque roue il y a un système hydraulique qui peut être piloté. Pour déterminer le roulis du véhicule et donc pour effectuer le contrôle de celui-ci, l'auteur a prévu d'utiliser l'accélération angulaire de la masse suspendue ainsi que le déplacement de cette masse et la dérivée de l'accélération angulaire. Le contrôleur de cette solution est aussi un contrôleur proportionnel dérivateur.

Une solution utilisant deux actionneurs, un sur chaque train est aussi proposée dans [Kon02]. Ici l'auteur utilise deux actionneurs positionnés sur les trains du véhicule au niveau de la barre anti-roulis. Le comportement du véhicule est obtenu en partant de la mesure de l'accélération latérale et de certaines mesures propres de la dynamique longitudinale. Les actionneurs sont pilotés en pression. Pour les piloter les auteurs ont utilisé les informations sur la dynamique du véhicule et les informations sur la pression des actionneurs. Pour garantir la sécurité du véhicule, le contrôle de roulis est effectué de préférence sur le train avant. Ce choix rend le véhicule plutôt sous-vireur et donc plus facilement contrôlable par le conducteur.

La problématique du contrôle du roulis est plus importante, lorsque le centre de gravité du véhicule est plus haut. C'est typiquement le cas des véhicules lourds. Une application concernant le contrôle du roulis pour ce type de véhicules est présentée dans [SC03]. Les auteurs ont décidé d'utiliser un contrôleur par retour d'état. Ils ont donc proposé de minimiser un critère quadratique en résolvant un problème LQG standard. Ce type de problème se révèle bien adapté lorsqu'il n'y a pas de perturbations sur l'entrée. En supposant un modèle du véhicule ayant l'angle de braquage comme entrée, il est possible de constater que celle-ci peut être considérée comme une perturbation vis-à-vis du comportement en roulis du véhicule. Afin de pouvoir bien rejeter cette perturbation, ils sont donc obligés de la considérer comme un état. Le problème d'optimisation est donc résolu sur cette nouvelle représentation d'état. Il sera donc possible de répartir le gain statique en une partie associée aux états et une partie associée à l'angle volant. L'actionneur utilisé est un couple qui s'ajoute à l'action de la barre antiroulis. La méthode utilisée nécessite des informations sur les états qui sont obtenues en utilisant un filtre de Kalman.

TAB. 5.3 – *Récapitulatif des articles et des méthodologies utilisées pour le contrôle du roulis*

Article	Actionneur	Méthodologie et Intérêt
[Cec00]	changement raideurs barre anti-roulis avant et arrière ou suspensions actives	contrôleur proportionnel dérivateur.
[Kon02]	changement raideurs barre anti-roulis avant et arrière	
[SC03]	changement raideurs barre anti-roulis avant et arrière	retour d'état
[GCRdL00]	suspension actives	contrôleur en boucle ouverte et en boucle fermée par retour d'état
[DK02]	changement raideurs barre anti-roulis avant et arrière	logique floue

Une solution utilisant encore les suspensions actives est proposée dans [GCRdL00]. Le but des auteurs est de piloter l'angles de tangage et de roulis, la distribution des raideurs de roulis ainsi que le pompage de la masse suspendue. Pour effectuer cette opération ils ont à disposition quatre capteurs de débattement des roues ainsi que la pression des quatre suspensions. Avec ces informations, les auteurs sont capables de reconstruire les grandeurs qu'ils ont envisagées d'asservir. La loi de contrôle est divisée en deux parties. La première est effectuée en boucle ouverte, tandis que la seconde est effectuée en boucle fermée. Les deux parties sont sensées piloter les efforts des suspensions actives. La partie en boucle ouverte a pour but de compenser les entrées du conducteur afin de contrôler la partie transitoire du système. Elle a aussi pour but de générer les consignes qui sont utilisées par la partie en boucle fermée afin d'effectuer le contrôle de la partie statique de la réponse. La boucle fermée est réalisée en utilisant une méthodologie par retour d'état. Les états sont estimés en utilisant des filtres de Kalman.

Il est aussi possible de trouver des solutions pour le contrôle du roulis utilisant la logique floue comme dans [DK02]. Dans ce papier, les auteurs ont supposé avoir à disposition les mesures de l'angle de roulis et de la vitesse du roulis du véhicule et piloter la tension des solénoïdes des servo-vannes qui agissent sur la raideur des barres anti-roulis. Vu la difficulté de mesurer l'angle de roulis, les auteurs ont pensé utiliser l'accélération latérale et l'angle de rotation des actionneurs. L'accélération latérale et les deux angles des actionneurs sont introduits dans un réseau de neurones qui est utilisé pour reconstruire l'angle de roulis et sa vitesse. Ces deux grandeurs sont donc envoyées à un contrôleur en logique floue qui pilote les tensions de deux actionneurs. Les actionneurs sont positionnés un sur le train avant et un sur le train arrière.

Mécanique des actionneurs

Pour piloter le roulis il est possible de trouver plusieurs technologies. Parmi les solutions techniques les plus répandues, il y a sans doute celle à amortissement variable qui est utilisée depuis plusieurs années dans le domaine automobile. Dans ce type de systèmes l'amortissement

est piloté soit de façon électronique soit de façon hydraulique. D'autres solutions qui ont vu le jour ces dernières années sont les suspensions électromagnétiques qui associent des moteurs électromagnétiques linéaires et des amplificateurs de puissance opportunément pilotés. Une autre possibilité est d'utiliser des actionneurs hydrauliques sur les barres antiroulis permettant d'en modifier la raideur.

5.3.2 Synthèse des lois de commande pour le contrôle du roulis

Nous voulons maintenant nous intéresser au contrôle du roulis, pour ce faire deux solutions utilisant la méthodologie H_∞ sont présentées. Il est aussi nécessaire d'introduire des informations sur le capteur utilisé pour mesurer l'angle de roulis : l'utilisation d'un gyroscope et l'intégration de la mesure qu'il fournit est dans la plupart des cas trop coûteuse et sa mesure souvent bruitée par le dévers de la route.

Approche H_∞ par loop-shaping

En suivant la démarche empruntée lors du contrôle du moment de lacet, nous avons d'abord utilisé une méthodologie H_∞ par loop-shaping pour effectuer le contrôle de l'angle de roulis. Lorsque nous analysons la dynamique du roulis, il est possible de constater que celle-ci n'est pas trop influencée par la vitesse du véhicule (figure 5.27). Le modèle utilisé est celui présenté dans le chapitre 4. Pour effectuer la synthèse nous avons supposé que tous les coefficients sont constants. Le modèle obtenu sera donc linéaire. Les entrées du modèle sont les efforts des suspensions, tandis que la sortie est l'angle de roulis.

Il est donc possible de synthétiser un contrôleur fixe et indépendant de la vitesse.

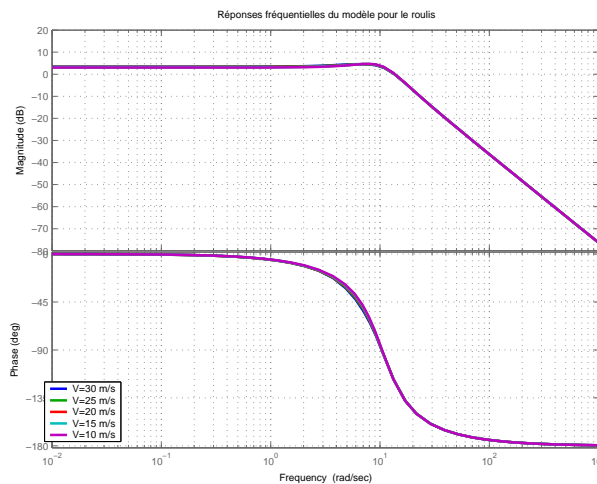


FIG. 5.27 – Réponse fréquentielle du modèle pour le roulis

Dans le paragraphe précédent nous avons introduit un modèle de référence du véhicule pour pouvoir déterminer une vitesse de lacet de consigne. Lors de l'analyse du roulis, nous

avons toujours besoin d'une consigne pour effectuer l'asservissement, mais à la différence du cas précédent, le recours à un modèle n'est pas toujours nécessaire : dans la plupart des cas les contrôleurs ont pour consigne un angle de roulis faible qui peut être déterminé en fonction des autres grandeurs du véhicule comme, par exemple, l'accélération latérale. Un modèle de référence est donc nécessaire dans ce cas ; la consigne d'angle de roulis est alors générée à partir de l'accélération latérale et/ou de l'angle volant.

Les mesures que nous avons utilisées sont l'angle de roulis (soit sa mesure, soit son estimation) et nous avons décidé d'utiliser quatre suspensions actives capables de fournir un effort vertical. Lors des exemples qui seront présentés par la suite, nous avons considéré une consigne d'angle de roulis nulle. Les filtres choisis sont ceux présentés dans (5.20). Comme lors du contrôle du moment de lacet, le modèle est augmenté par deux filtres passe bas :

$$\begin{aligned} W_{1_{Fa_{ij}}}(s) &= 1000 \frac{50}{s + 50} & i, j = 1, 2 \\ W_2(s) &= \frac{600}{s} \frac{50}{s + 50} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Comme pour les cas précédents le choix des filtres suit une démarche systématique. Le choix de la valeur de K_1 est fait parce que nous voulons avoir un d'effort sur chacune des suspensions équivalent à 1000 N. Le choix de la valeur de K_2 est fait pour obtenir une erreur sur l'angle de roulis plus faible que celle acceptée pour la vitesse de lacet. Les bandes passantes des filtres de pré- et post- compensation sont choisis en regardant la performance que nous voulons donner au système.

Il est évident que lors du choix des filtres, il est important de considérer aussi les performances et les consommations atteignables avec la loi de commande. Comme pour le cas précédent, le contrôleur obtenu est d'ordre élevé. L'utilisation d'une méthode de réduction est donc nécessaire. Nous avons décidé d'utiliser la même méthode que dans le cas du contrôle du moment de lacet : la réduction selon les valeurs singulières de Hankel de la factorisation première. Comme dans le cas précédent la réduction est faite seulement sur le contrôleur sans les filtres de pré- et post- compensation.

Le contrôleur d'ordre réduit obtenu est d'ordre 3 ; le contrôleur final avec les filtres est d'ordre 9. Le contrôleur d'ordre réduit présente le même comportement et la même réponse fréquentielle que le contrôleur d'ordre plein, comme on peut le voir sur la figure 5.28. En regardant les réponses fréquentielles des contrôleurs pour les différents actionneurs, il est possible de constater que les phases des contrôleurs sur les deux cotés du véhicule sont en opposition : lorsqu'un coté essaie de rapprocher la masse suspendue des roues l'autre coté logiquement essaie de les éloigner.

La structure de la fonction de transfert du contrôleur entre l'erreur sur la consigne et la force à appliquer sur la suspension est⁷ :

$$K_{AM}(s) = \frac{\alpha_{1AM}s^3 + \alpha_{2AM}s^2 + \alpha_{3AM}s + \alpha_{4AM}}{\beta_{1AM}s^3 + \beta_{2AM}s^2 + \beta_{3AM}s + \beta_{4AM}} \quad (5.21)$$

La forme du contrôleur complet permettant de piloter une suspension est donc :

$$K_a(s) = W_1(s) K_{AM}(s) W_2(s) \quad (5.22)$$

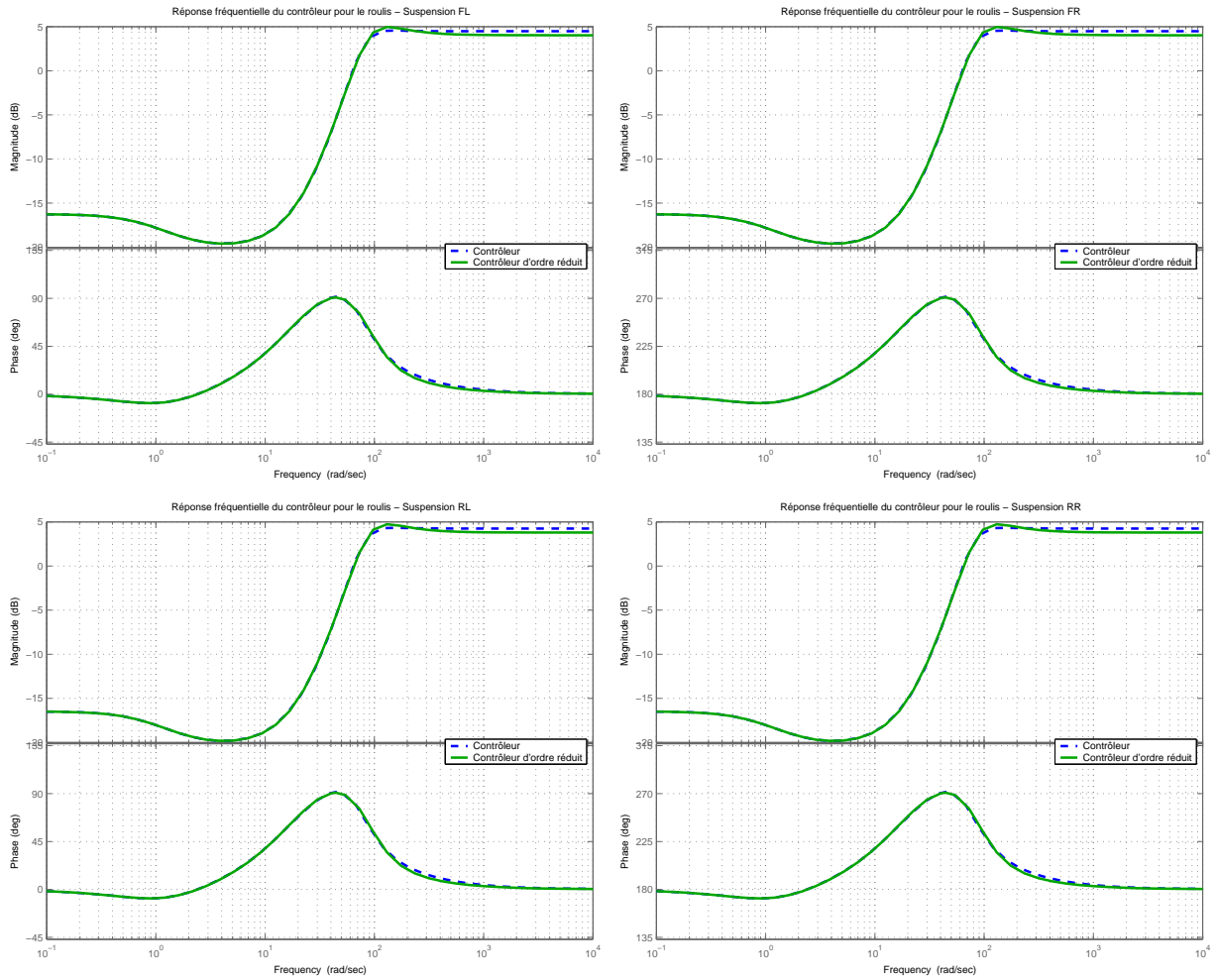


FIG. 5.28 – Réponse fréquentielle de contrôleur du roulis et de celui d'ordre réduit

Les réponses fréquentielles du système en boucle ouverte corrigée et en boucle fermée corrigée sont reportées sur la figure 5.29.

La loi développée a pour but de rejeter la perturbation. C'est pour cette raison que nous avons décidé de reproduire sur la figure 5.30, les réponses fréquentielles de la fonction de trans-

7. les coefficients des polynômes ne sont pas donnés pour des raisons de confidentialité

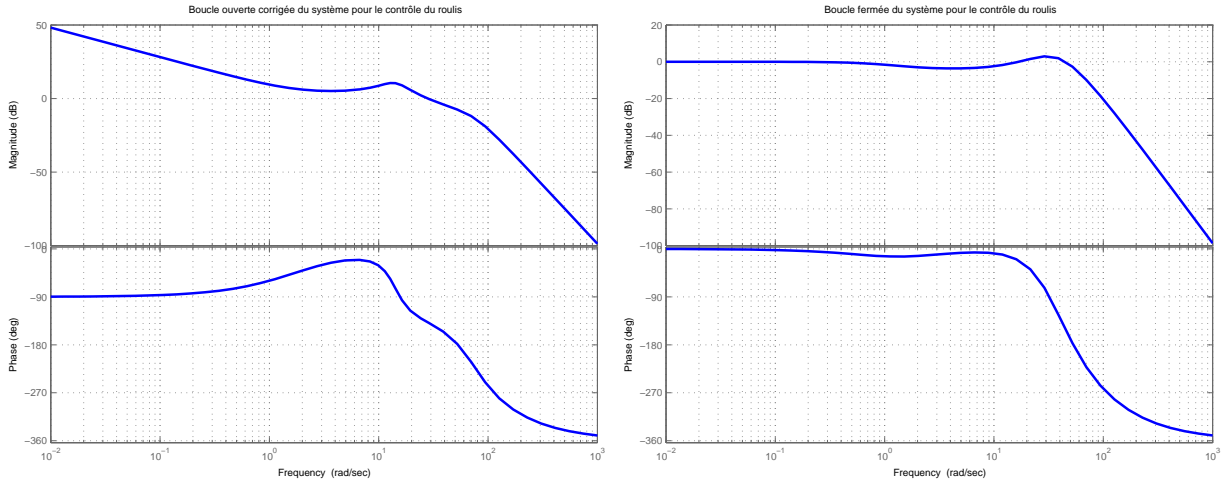
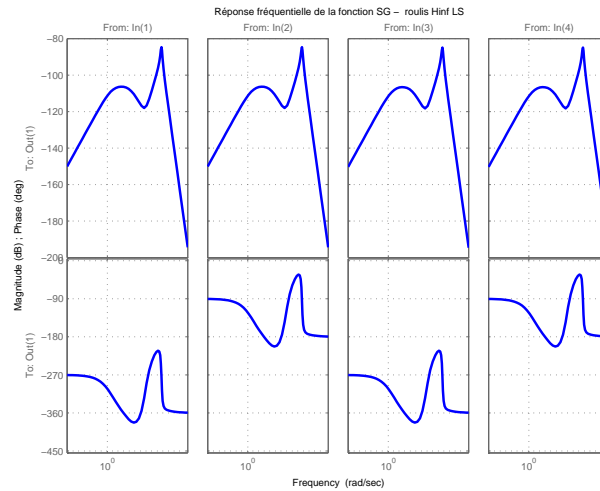


FIG. 5.29 – Réponses fréquentielles du système

fert $F_{r_{susp1}}$.

$$F_{r_{susp1}} = \frac{G(s)}{1 + G(s)K_a(s)}$$

En regardant les résultats reportés sur la figure 5.30, nous constatons la présence d'un intégrateur à basse fréquence qui nous permet d'affirmer que le système corrigé est capable de rejeter les perturbations constantes. Nous pouvons aussi voir que la fonction est loin de 0 dB et que donc nous pouvons bien rejeter aussi les autres types de perturbations. Dans ce cas la perturbation que nous pouvons rejeter est une perturbation intervenant au niveau des l'actionneurs.


 FIG. 5.30 – Réponse fréquentielle de la fonction $F_{r_{susp1}}$ - amortisseur

Les performances du contrôleur antiroll sont évaluées en simulation en utilisant un simulateur non linéaire du véhicule. Le test le plus simple est de tracer la réponse harmonique du

système corrigé, entre l'angle volant et l'angle de roulis, dans le domaine de fréquence où le comportement en roulis du véhicule est significatif. La loi est jugée par rapport à sa capacité à modifier l'angle de roulis et donc à garder une assiette la plus plate possible. Le test que nous avons choisi pour évaluer la performance du contrôleur est le suivant : nous supposons avoir un véhicule lancé à une vitesse V_1 et de l'exciter en agissant sur l'angle au volant afin de lui faire avoir une accélération latérale équivalente à $1g$.

L'action du contrôleur permet de réduire l'angle de roulis, comme on peut le constater sur la figure 5.31 où nous présentons l'angle de roulis obtenu en fonction de la fréquence. Dans cette figure nous reportons l'angle de roulis obtenu avec un véhicule équipé d'un système actif de contrôle du roulis et d'un véhicule passif. Sur cette figure nous reportons l'angle de roulis maximal du véhicule en fonction de la fréquence. Afin d'obtenir cette grandeur nous appliquons le test précédemment décrit pour des fréquences d'excitation volant différentes. La figure est donc construite en considérant l'angle maximal du roulis pour chacune de ces fréquences.

Dans la partie de gauche il y a l'angle du véhicule avec et sans système de contrôle du roulis. Le véhicule avec contrôle du roulis présente des performances nettement plus satisfaisantes que celles du véhicule passif. Dans la partie droite, il y a un zoom sur l'angle de roulis du véhicule avec contrôle de l'anti-roulis. Des considérations énergétiques sont fournies dans la suite de ce mémoire afin de comprendre la puissance nécessaire pour atteindre les performances présentes.

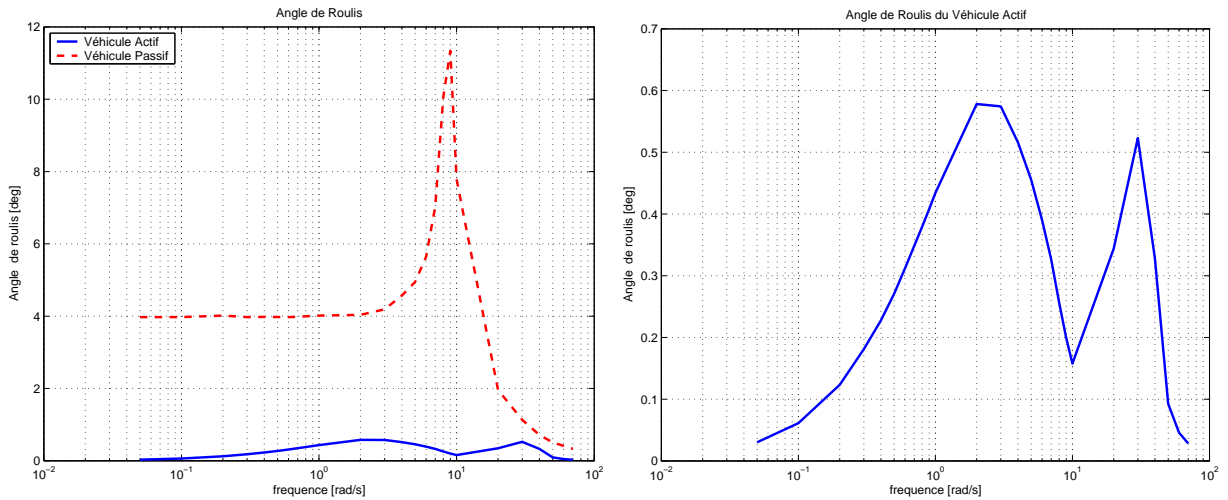


FIG. 5.31 – *Evolution de l'angle de roulis en fonction de la fréquence*

Approche H_∞ standard

Une autre façon d'aborder le problème du contrôle du roulis est d'utiliser la méthodologie H_∞ standard. Nous étudions le problème comme dans le cas précédent. Nous présentons par la suite seulement les résultats obtenus.

Comme pour l'exemple précédent le contrôleur utilise une information sur l'angle de roulis (soit sa mesure, soit son estimation) et il pilote quatre actionneurs d'effort posés sur les quatre suspensions. La structure utilisée pour la synthèse est celle de la figure 5.32. Le problème H_∞ standard correspondant s'écrit :

$$\left\| \begin{pmatrix} W_1 S & W_1 S G W_3 \\ W_2 K S & W_2 K S G W_3 \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma$$

où G est le modèle du véhicule, K est le correcteur et $S = (1 + GK)^{-1}$ est la fonction de sensibilité.

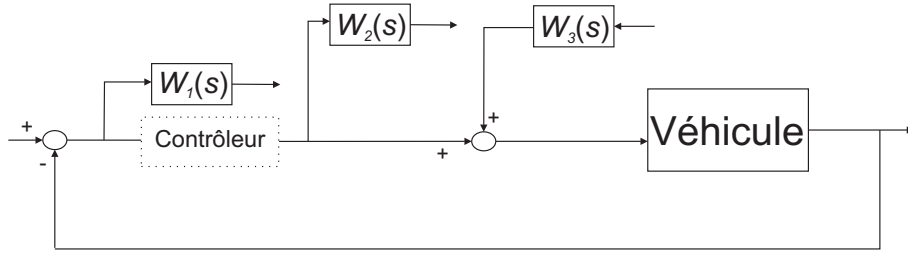


FIG. 5.32 – Structure de la synthèse H_∞ standard

Pour effectuer le choix des filtres utilisés dans l'approche H_∞ standard, nous considérons d'abord les basses fréquences, pour analyser ensuite les hautes fréquences. Lorsque nous effectuons la synthèse selon l'approche standard nous pouvons agir directement sur le comportement de la fonction de sensibilité ainsi que sur la fonction de sensibilité inverse. Si nous sommes en basse fréquence nous pouvons utiliser les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} S(j\omega) &\approx (G(j\omega)K(j\omega))^{-1} & |(G(j\omega)K(j\omega))^{-1}| &< \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)|} \\ S(j\omega)G(j\omega) &\approx K(j\omega)^{-1} & |K(j\omega)^{-1}| &< \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)W_3(j\omega)|} \\ K(j\omega)S(j\omega) &\approx G(j\omega)^{-1} & |G(j\omega)^{-1}| &< \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)|} \\ T(j\omega) &\approx 1 & |1| &< \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)W_3(j\omega)|} \end{aligned}$$

Nous voulons un contrôleur avec un gain important en bande passante ; pour définir ce gain nous utilisons seulement le filtre W_1 qui aura donc un gain statique important, tandis que le filtre W_3 n'a pas de gain pour les fréquences considérées. Vu que γ est une valeur proche de 1 pour être sûr de garantir la contrainte sur la fonction de sensibilité complémentaire le filtre W_2 a un gain faible en basse fréquence.

Il est maintenant possible de passer à l'analyse du choix des filtres en haute fréquence. Pour ce faire nous procédons de façon identique au cas précédent. Considérons donc les approximations suivantes qui sont valables en haute fréquence :

$$\begin{array}{ll}
S(j\omega) \approx 1 & |1| < \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)|} \\
S(j\omega)G(j\omega) \approx G(j\omega)^{-1} & |G(j\omega)^{-1}| < \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)W_3(j\omega)|} \\
K(j\omega)S(j\omega) \approx K(j\omega)^{-1} & |K(j\omega)^{-1}| < \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)|} \\
T(j\omega) \approx G(j\omega)K(j\omega) & |G(j\omega)K(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)W_3(j\omega)|}
\end{array}$$

Comme la fonction de sensibilité tend vers 1 en haute fréquence, il est évident que le filtre W_1 doit avoir une valeur faible en haute fréquence pour garantir la contrainte. Nous voulons aussi que le contrôleur ait un gain faible en haute fréquence il est donc évident en regardant les contraintes que le filtre W_2 doit avoir un gain élevé en haute fréquence. Pour conclure il est possible de déterminer la valeur en haute fréquence du filtre W_3 qui est choisi de façon à rendre encore plus faible le comportement du système au delà de la bande passante.

Pour conclure le choix des fréquences de coupure est réalisé afin de satisfaire les performances dynamiques du système en boucle fermée.

Les filtres utilisés sont ceux présentés dans (5.23) et (5.24)

$$W_1(s) = \frac{0,1s + 5}{s + 0.05} \quad (5.23)$$

$$\left. \begin{array}{l}
W_2(s) = \frac{100(s + 10)}{s + 100000} \\
W_3(s) = \frac{100(s + 0,4)}{s + 360}
\end{array} \right\} 4 \text{ filtres} \quad (5.24)$$

Le contrôleur avant réduction obtenu par synthèse H_∞ standard est d'ordre 8. Il serait souhaitable de réduire l'ordre, mais aucune méthode ne nous a permis d'obtenir des résultats satisfaisants. Toutefois cet ordre est sensiblement le même que celui du correcteur total obtenu par l'approche précédente.

La structure de la fonction de transfert du contrôleur entre l'erreur sur la consigne et la force à appliquer sur la suspension est⁸ :

$$K_{AMsta}(s) = \frac{\sum_{i=8}^0 \alpha_{i_{AMsta}} s^i}{\sum_{i=8}^0 \beta_{i_{AMsta}} s^i} \quad (5.25)$$

Les réponses fréquentielles du système en boucle ouverte et en boucle fermée sont reportées sur la figure 5.33.

Sur la figure 5.34, il est possible de constater que les gabarit imposés pour la synthèse H_∞ sont bien respectés.

8. les coefficients des polynômes ne sont pas donnés pour des raisons de confidentialité

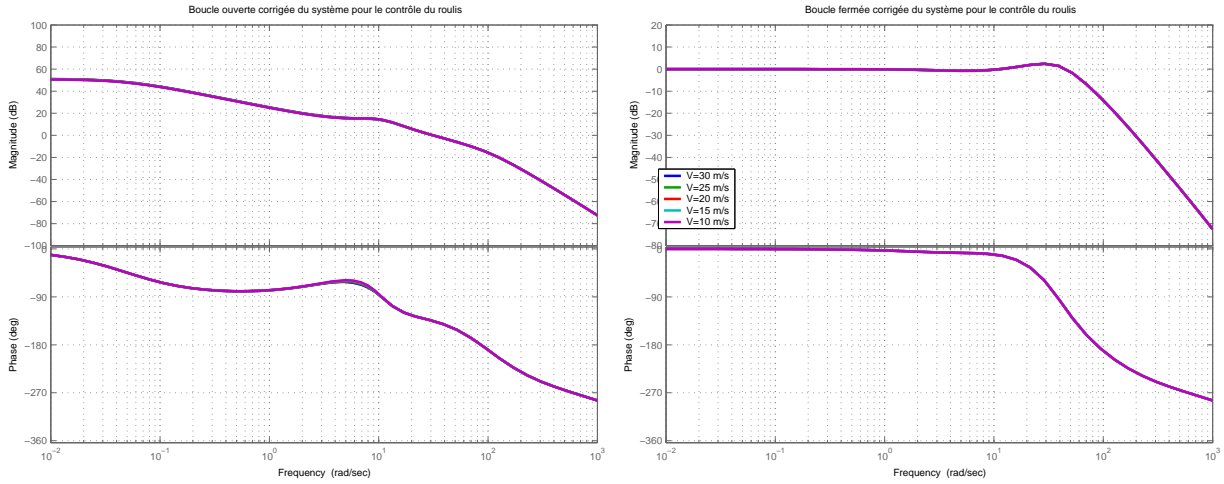
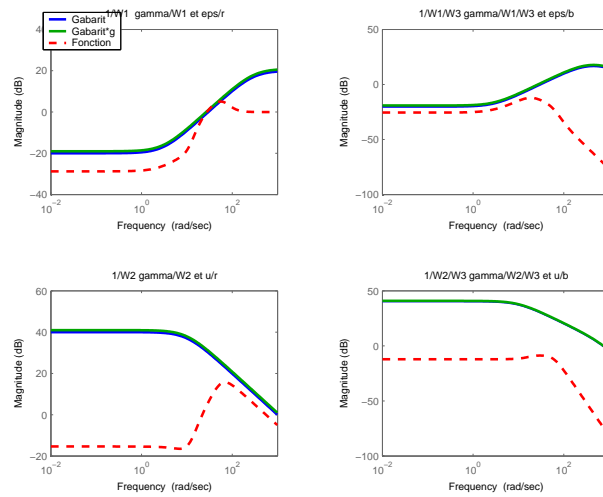


FIG. 5.33 – Réponses fréquentielles du système


 FIG. 5.34 – Vérification gabarits H_∞ standard

Le contrôleur obtenu par synthèse H_∞ standard est évalué suivant la même procédure que pour le contrôleur H_∞ par loop-shaping. Comme on peut le constater sur la figure 5.35, les résultats obtenus sont du même ordre de grandeur. Par contre, lorsque nous regardons de plus près la consommation énergétique de ce deuxième contrôleur, il est possible de constater (en réalisant le dimensionnement des actionneurs) qu'il demande deux fois et demi plus de puissance que le premier. La manière d'obtenir cette figure est équivalente à celle utilisée dans le cas du contrôleur obtenu par méthodologie H_∞ par loop-shaping.

Suite aux résultats obtenus au niveau des performances et de la consommation, il est sans doute plus intéressant de conserver le contrôleur H_∞ par loop-shaping. C'est pour cette raison que dans la suite seul ce contrôleur est utilisé.

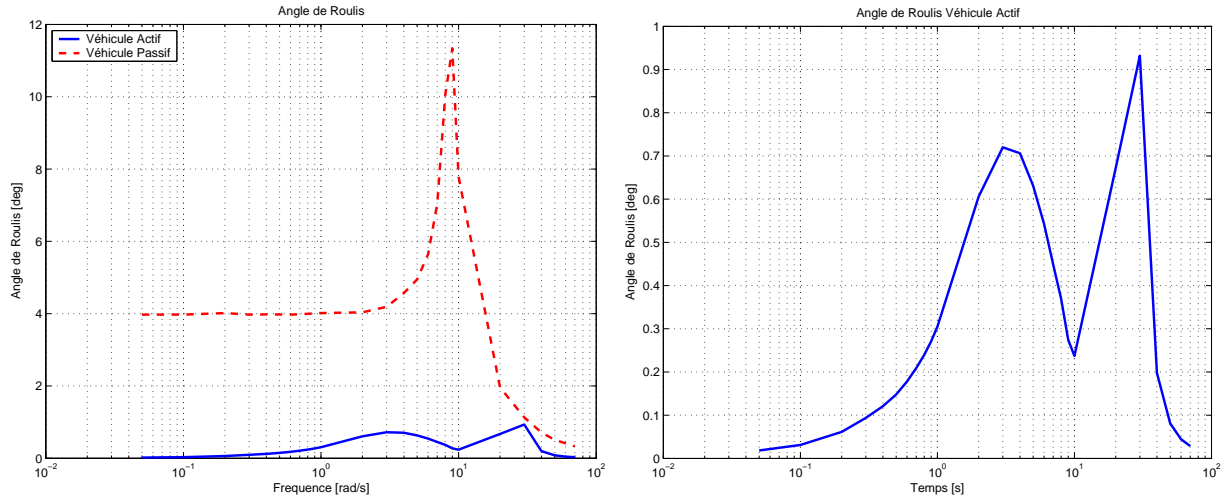


FIG. 5.35 – Evolution de l'angle de roulis en fonction de la fréquence

5.3.3 Analyse de robustesse

Lors de l'analyse de robustesse pour le contrôleur de roulis les paramètres incertains considérés sont :

- l'inertie de roulis
- la raideur de suspension
- leur amortissement
- la masse
- le déplacement latéral du centre de gravité

Le choix des raideurs et des amortissements est logique, lorsqu'une analyse de robustesse est faite vis-à-vis du roulis. Les variations de ces paramètres influencent le comportement en roulis du véhicule : un véhicule avec des suspensions très raides est moins sujet à la prise de roulis, tandis qu'un véhicule avec des suspensions souples peut prendre facilement du roulis. L'étude de la robustesse est donc intéressante, parce qu'elle nous permet de voir la robustesse de la loi vis-à-vis des changements du "typage" du véhicule passif. Il est aussi intéressant d'étudier les variations de ces paramètres, parce que les valeurs des ressorts et des amortisseurs ne peuvent pas être considérés comme constants.

L'étude considère aussi la masse et l'inertie. Une variation de masse provoque une variation de l'inertie et donc de la dynamique du roulis.

Pour conclure, il est évident que lorsque le véhicule prend du roulis il y a un déplacement de la caisse et donc du centre de gravité. Ce déplacement implique une variation du bras de levier lors de l'application d'un couple anti-roulis et il est donc important de le considérer pour évaluer la robustesse de la loi de commande.

TAB. 5.4 – Variations de paramètres pour la robustesse du roulis

Paramètre	Valeur de Synthèse et Valeur Nominale	Incertitudes
Masse	1700 kg	$\pm 250\text{kg}$
Inertie de roulis	500 kgm^2	$\pm 200\text{ kgm}^2$
Raideur du train avant	24000 N/m	$\pm 40\%$
Raideur du train arrière	27000 N/m	$\pm 40\%$
Amortissement du train avant	2100 Ns/m	$\pm 50\%$
Amortissement du train arrière	2000 Ns/m	$\pm 50\%$
Déplacements CDG (latéral et longitudinal)	0	$\pm 10\text{cm}$

Dans le paragraphe précédent, nous avons constaté que la vitesse n'influence pas le comportement en roulis, c'est pour cette raison que ce paramètre n'a pas été considéré ici.

Les valeurs numériques des paramètres considérés sont reportées dans le tableau 5.4.

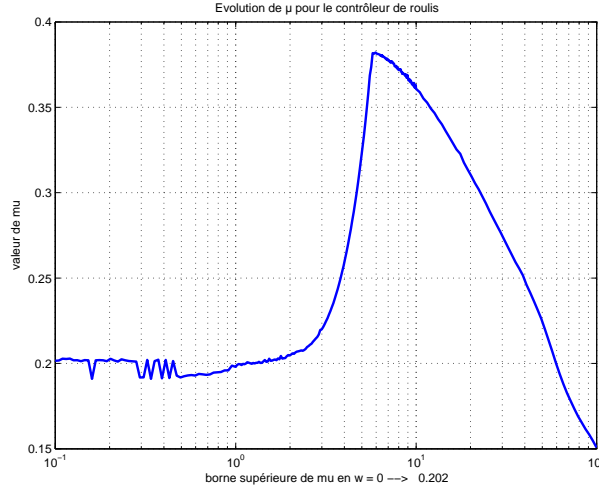
Le choix des valeurs nominales et des incertitudes des paramètres est fait selon les critères suivants :

- Masse : nous avons choisi les mêmes valeurs que celles utilisées lors de l'analyse pour le moment de lacet et pour les mêmes raisons
- Inertie de roulis : la valeur nominale est celle que nous pouvons mesurer sur un véhicule avec 2 passagers. L'incertitude par contre est choisie de façon à couvrir toute la plage de variation de l'inertie.
- Raideur des trains et amortissement des trains : les valeurs nominales sont les valeurs des tangentes des caractéristiques en 0. Les incertitudes sont calculées en utilisant les caractéristiques des composants et leurs dispersions.
- Déplacement du centre de gravité : nous avons utilisé les mêmes critères que ceux appliqués lors de l'analyse du moment de lacet.

Les résultats obtenus lors de l'analyse de robustesse pour le contrôleur de roulis sont donnés sur la figure A.2. Nous pouvons constater que la valeur singulière structurée est nettement inférieure à 1 vis-à-vis des incertitudes paramétriques choisies. Nous pouvons donc affirmer que le contrôleur est robuste.

5.3.4 Contrôle du lacet avec repartition du couple antiroulis

Lors de l'analyse du contrôleur antiroulis, le concept de répartition du couple a été introduit : nous avons souligné que l'utilisation d'un seul actionneur mis sur le train avant a tendance à rendre le véhicule sousvireur, lorsque la pression dans l'actionneur est à son maximale, et donc à modifier son comportement en lacet. On comprend donc que le comportement en lacet d'un véhicule peut être modifié en agissant sur la répartition du couple entre le train avant et le train arrière. Ce paragraphe a donc pour but de présenter une solution permettant de piloter

FIG. 5.36 – *Analyse de robustesse pour le contrôleur de roulis*

la vitesse de lacet en agissant sur la répartition de la charge entre les trains. Il n'a donc pas l'intention d'être totalement exhaustif, mais il veut seulement introduire une solution qui sera utilisée dans le chapitre 6.

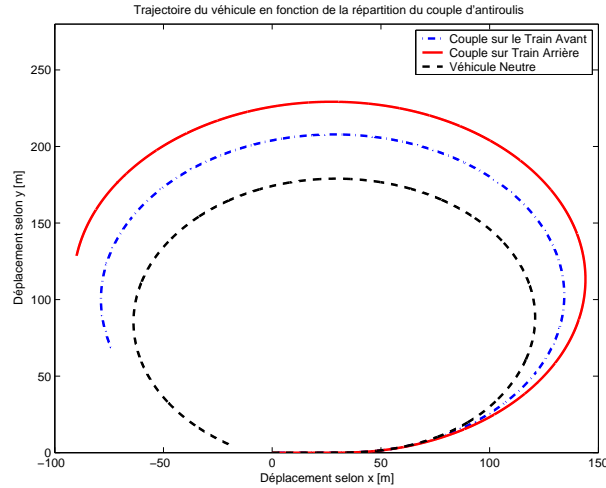
En effet un contrôleur anti-roulis avec répartition des raideurs entre les trains peut aussi pouvoir le comportement latéral, vu qu'en modifiant la charge nous pouvons modifier les efforts passés par les pneumatiques.

Sur la figure 5.37, nous pouvons constater que l'application du couple de compensation du roulis sur le train avant ou arrière change sensiblement le comportement du véhicule par rapport à celui d'un véhicule "neutre" (répartition équivalente entre le train avant et le train arrière): dans le premier cas il devient sous-vireur dans le deuxième sur-vireur. Le test que nous avons conduit sur le véhicule est le suivant: un véhicule roule à vitesse constante V , le conducteur applique un braquage α . Dans le premier cas la couple anti-roulis est répartie de façon équivalente entre les trains avant et arrière (véhicule neutre), dans les autres le couple anti-roulis est appliqué soit sur le train avant soit sur le train arrière.

Le souhait du constructeur automobile est d'asservir le véhicule sur un comportement le plus neutre possible: d'un côté il est nécessaire d'éviter que le véhicule ait un comportement survireur pour éviter les situations dangereuses et de l'autre côté un comportement trop sous vireur peut être parfois désagréable pour le conducteur.

Dans [Gou05] l'auteur présente trois solutions pour résoudre ce problème. La première consiste en l'utilisation d'une cartographie qui en fonction des accélérations du véhicule et de sa vitesse fournit un coefficient représentant la répartition du couple anti-roulis nécessaire pour effectuer le contrôle de la vitesse de lacet. Une solution utilisant l'information sur l'adhérence est aussi utilisée. Les solutions proposées vont donc travailler en boucle ouverte.

La deuxième solution présentée utilise une approche très répandue dans la littérature: celle

FIG. 5.37 – *Trajectoire du véhicule en fonction de la répartition du couple antirollis*

en boucle fermée avec un contrôleur de type PID avec anti wind-up. L’auteur considère ici la contrainte de la stabilité du véhicule. Cette contrainte oblige l’auteur à accepter seulement les répartitions rendant le véhicule sousvireur. Ce choix a l’avantage de mettre la sécurité au centre des intérêts de l’industrie automobile.

Le fait de limiter les comportements survireurs du véhicule a pour conséquence d’avoir un contrôleur avec des performances dégradées vis-à-vis de certaines situations de conduite comme par exemple la mise en virage.

Toujours dans [Gou05], une troisième solution est proposée pour palier à ce problème. Ici le contrôleur se présente en boucle ouverte. La solution proposée consiste en l’utilisation d’une rétroaction effectuée sur un modèle qui a été identifié à partir du véhicule.

Le report de charge est alors calculé par le contrôleur et envoyé au véhicule. Lorsque le véhicule est proche du modèle identifié, cette solution est sans doute la plus intéressante : le contrôle peut être calculé très facilement et peut être avec un bande passante élevée. Par contre, lorsque le véhicule a un comportement très éloigné de celui du modèle, cette solution n’est pas satisfaisante.

Une approche utilisant les modes glissants est proposée dans [WH95]. Ici les auteurs ont recherché la stabilité du système lors du suivi de trajectoire pour la vitesse de lacet. La conclusion est très intéressante : si l’angle de braquage des roues n’est pas nul, il n’est pas possible de trouver une solution du problème garantissant la stabilité globale et ayant des valeurs raisonnables. Les résultats obtenus par les auteurs ont montré des performances très proches entre la solution intuitive, avec un contrôleur proportionnel, et celle obtenue par mode glissant avec un très faible temps de réponse. Suite à cette étude, les auteurs ont proposé d’utiliser une solution avec un contrôleur proportionnel. Ici la vitesse de lacet de référence est définie à partir d’un coefficient de sousvirage qui trouve son utilisation dans [WWXC05]. Ce coefficient permet de typer le véhicule de façon statique et de garantir un comportement très uniforme pendant

différentes situations de vie.

5.3.5 Solution proposée

Vues les conclusions faites dans les études sur le contrôle de lacet en utilisant la répartition du couple antirollis, nous avons décidé d'utiliser la solution en boucle fermée utilisant un PID avec anti wind up. Cette solution n'est pas satisfaisante dans le cas où l'erreur entre la vitesse de lacet et sa référence est importante et très dynamique; néanmoins elle est satisfaisante pour asservir la vitesse de lacet lors de faibles perturbations.

La structure de contrôle est celle de la figure 5.38.

Pour évaluer la performance du contrôleur, nous avons décidé d'utiliser les mêmes tests que dans les paragraphes précédents. Deux solutions sont proposées. Dans la première, nous permettons au véhicule d'avoir un couple antirollis sur le train arrière plus important que celui sur le train avant : nous acceptons d'avoir un véhicule sur-vireur, tandis que les répartitions rendant le véhicule sous-vireur sont naturellement acceptées. Lors de la deuxième solution, nous acceptons seulement les répartitions rendant le véhicule sous-vireur.

Il est possible de constater sur la figure 5.39 que cette deuxième solution n'est pas capable de fournir des performances de même niveau que celles obtenues dans les paragraphes précédents.

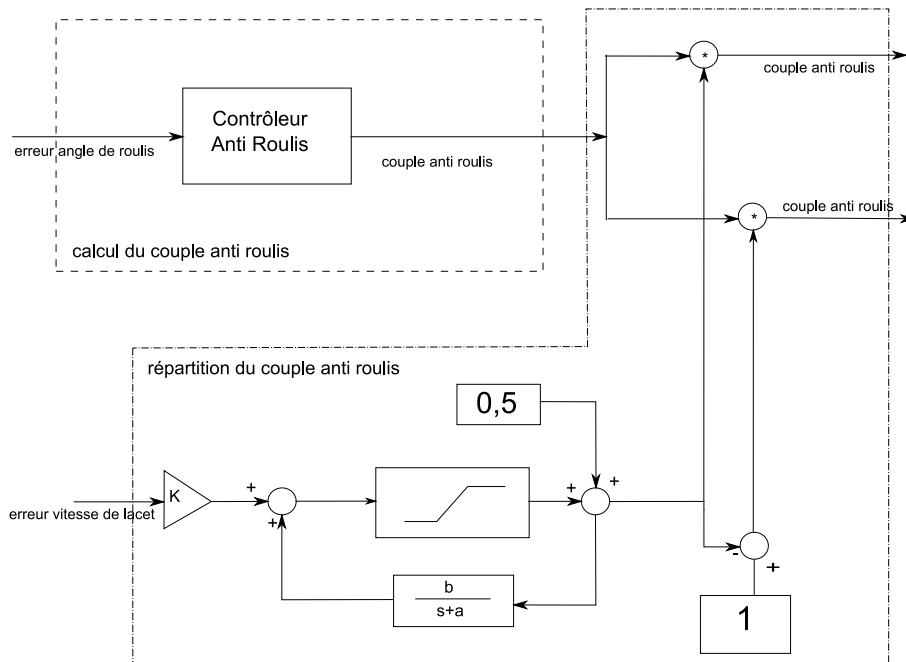


FIG. 5.38 – Structure de contrôle pour la répartition du couple antirollis pour contrôler la vitesse de lacet

La solution qui permet d'avoir un véhicule survireur permet d'obtenir des résultats meilleurs. De plus, cette solution est intéressante vu qu'elle permet de contrôler deux dynamiques en agis-

sant sur un seul actionneur.

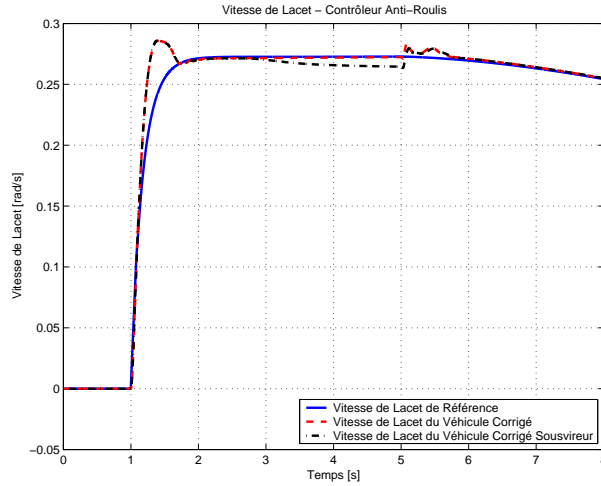


FIG. 5.39 – Résultats du véhicule avec contrôleur sur la répartition du couple anti-roulis

5.4 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons présenté des contrôleurs élémentaires pour contrôler la vitesse de lacet et l'angle de roulis. Lors de l'étude, nous avons présenté différentes solutions quant aux actionneurs choisis. Les solutions proposées ont pour but de mieux comprendre la robustesse et les utilisations possibles des contrôleurs mono-actionneur dans les différentes situations de conduite.

Rappelons qu'une étude complémentaire est reproduite en Annexe D, où sont comparées deux lois de commande LPV avec ou sans prise en compte de la vitesse de variation des paramètres.

Il est néanmoins vrai qu'une solution utilisant une combinaison d'actionneurs peut être intéressante. Elle devra permettre de profiter au mieux des caractéristiques de chacun de ces actionneurs et des lois réalisées pour les piloter. Ce point est abordé au chapitre suivant.

Pour conclure, nous voulons souligner que les lois présentées dans ce chapitre ne sont pas utilisables dans toutes les situations de conduite : pour certaines situations de conduite il sera nécessaire de changer les réglages de filtres et effectuer une nouvelle synthèse.

Chapitre 6

Contrôle d'une dynamique avec plusieurs actionneurs

Lors du chapitre précédent, les concepts fondamentaux sur le contrôle du véhicule ont été introduits.

Nous avons pu constater que chacun d'entre eux ne peut pas toujours satisfaire pleinement les performances qui sont requises dans le domaine de l'automobile. On peut facilement prouver que lors de certaines manoeuvres l'utilisation d'un contrôleur agissant soit sur le freinage soit sur le braquage donne des résultats moins bons que ceux atteignables avec un contrôleur utilisant les deux actionneurs.

En partant de la constatation que l'utilisation de plusieurs actionneurs permet d'obtenir des performances meilleures, il est possible de se poser la question sur le choix de la structure de contrôle nécessaire pour exploiter au mieux les performances des actionneurs.

Lors de l'analyse de cette question, la problématique de la structure du contrôleur s'impose. Deux solutions possibles ont été envisagées dans notre travail. La première consiste dans l'utilisation de plusieurs lois de commande agissant chacune sur un seul actionneur, optimisées pour pouvoir travailler ensemble. Cette solution est appelée par la suite mono-actionneur. Il est aussi possible de prévoir une deuxième solution, avec un seul contrôleur agissant sur plusieurs actionneurs en même temps. Cette solution est appelée par la suite multi-actionneurs.

Avant de poursuivre notre analyse, nous voulons souligner le fait que la dynamique de roulis est découplée de celle de lacet. Le contrôleur de roulis est ainsi utilisé seulement pour faire du confort donc une répartition fixée du couple d'antiroulis est utilisée. Vu que l'hypothèse de découplage des dynamiques est faite, nous nous intéressons par la suite seulement aux structures utilisant les contrôleurs pour le contrôle de la vitesse de lacet.

Il est évident qu'un contrôleur capable de satisfaire une performance bien précise n'est pas forcément capable de satisfaire une autre situation de conduite. C'est pour cette raison que l'analyse comparative des deux architectures a été effectuée pour plusieurs situations de conduite, afin de la rendre la plus exhaustive possible. Naturellement le véhicule peut être

confronté à une ou plusieurs de ces situations. Il est donc nécessaire de disposer d'une structure logique qui soit capable de détecter la situation dans laquelle le véhicule se trouve et d'activer le contrôleur adéquat. Pour cette raison nous avons étudié un exemple de superviseur effectuant ce travail.

Avant d'aller plus loin, nous devons mentionner que pour des raisons de confidentialité, nous n'avons pas pu reporter dans ce mémoire ce chapitre tel qu'il a été initialement conçu. Nous avons conservé le paragraphe suivant, qui propose quelques éléments bibliographiques sur le sujet; nous résumons ensuite les études entreprises, pour donner au lecteur une idée de son contenu.

6.1 Introduction aux contrôleurs couplés

Avant d'introduire notre approche pour le couplage entre différents contrôleurs, nous avons décidé d'introduire un bref panorama des solutions techniques existant sur le sujet.

Une des premières solutions est celle reportée dans [YKK⁺90], où les auteurs ont utilisé un véhicule équipé de suspensions actives et d'un système de braquage du train arrière. Pour garantir les performances longitudinales comme, par exemple, la distance d'arrêt, les auteurs ont prévu d'équiper le véhicule avec un ABS. Par contre les lois de commande de l'ABS ne sont pas développées par les auteurs, mais sont celles réalisées par le fournisseur ; donc l'ABS n'est pas compris " directement " dans la structure de contrôle qu'ils ont réalisée.

Les actionneurs choisis ont pour but d'améliorer la stabilité du véhicule et aussi son confort. Nous analysons d'abord le contrôleur agissant sur les roues arrière. Le contrôleur est synthétisé en boucle ouverte: les auteurs, en partant de l'angle volant, de la vitesse longitudinale du véhicule et des accélérations longitudinale et latérale, déterminent l'angle de braquage du train arrière. Les auteurs ne font jamais référence au concept d'asservissement ou de correction de trajectoire, mais il est vrai que par ce système, ils sont capables d'améliorer les performances du véhicule vis-à-vis de la sécurité.

La même idée est utilisée pour le contrôle des suspensions: en fonction des angles de rotation du véhicule, de sa vitesse longitudinale et de ses accélérations, ils déterminent l'action de correction à appliquer pour garantir le confort des passagers. Pour le contrôle de la stabilité du véhicule et pour le contrôle de son confort, des cartographies sont souvent utilisées.

Il est aussi possible de trouver des solutions proposant l'interaction entre deux systèmes d'actionneurs différents comme par exemple dans [ZKMAEB98]. Ici une solution utilisant un actionneur pour le braquage et un actionneur pour le freinage est proposée. Le contrôleur ainsi réalisé effectue seulement une répartition du couple de freinage afin de contrôler la dynamique envisagée par les auteurs. Ce contrôleur n'est par contre pas capable de prévenir le blocage des roues qui peut dégrader la performance du contrôleur. Pour éviter ce phénomène les consignes de pression calculées par le contrôleur sont envoyées à un système ABS qui les réduit lorsqu'il

est nécessaire afin d'éviter le blocage des roues (figure 6.1). Aussi si le système ABS est utilisé lors de la réalisation pratique, les auteurs ne l'ont pas considéré lors de la synthèse de la loi de commande. L'utilisation d'un système de contrôle utilisant les deux actionneurs dérive du fait que l'utilisation seulement du freinage implique parfois l'allongement de la distance d'arrêt et aussi que l'utilisation du seul système de braquage peut se révéler insatisfaisante dans certaines situations de conduite. La collaboration des deux actionneurs est réalisée en utilisant la logique floue. D'abord il y a une action de correction sur le braquage. Cette correction est communiquée au contrôleur dédié au freinage. S'il constate que l'action de correction demandée par le contrôleur du braquage est insuffisante pour assurer la sécurité du véhicule, alors il applique une action de correction supplémentaire en utilisant le système de freinage.

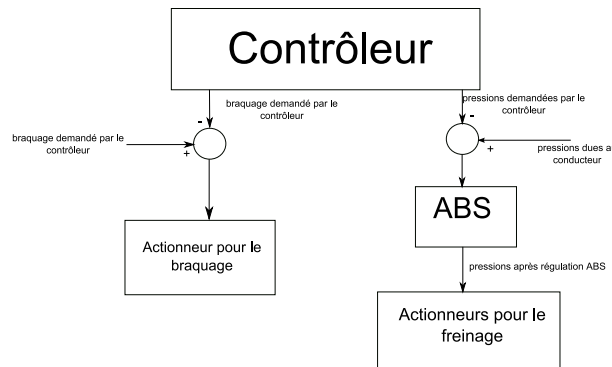


FIG. 6.1 – *Solution proposée dans [ZKMAEB98]*

Dans les solutions proposées, les deux contrôleurs sont calculés de façon totalement indépendante. Une solution où les deux contrôleurs sont synthétisés ensemble est proposée dans [MHIY92]. Le but que les auteurs se sont fixés est d'asservir la vitesse de lacet sur une vitesse de lacet de référence. La référence est obtenue en utilisant un modèle statique du véhicule. Le contrôleur ainsi réalisé est composé de deux parties : une en boucle ouverte et une en boucle fermée. La partie en boucle ouverte agit sur le braquage et elle a pour but de rejeter les perturbations. Celle en boucle fermée agit sur le freinage et elle a pour but d'asservir la vitesse de lacet sur la vitesse de référence en utilisant un contrôleur proportionnelle.

Dans [KS02] un système pour contrôler le moment de lacet et l'accélération latérale est proposé. Les auteurs ont choisi d'agir sur les angles de braquage du véhicule (braquage des roues avant et arrière). Les lois de commande sont développées en utilisant une méthodologie par retour d'état. Deux solutions sont donc envisagées : la première considère le braquage comme un état, tandis que la deuxième ne le considère pas comme un état. Si le braquage n'est pas un état, il est possible de trouver une solution avec une partie du contrôleur en boucle ouverte et une partie en boucle fermée. Le retour d'état n'est pas calculé avec une minimisation quadratique, mais selon un réglage choisi par les auteurs. Le choix des valeurs est effectué afin de minimiser l'angle de dérive du véhicule.

Certains auteurs ont proposé des contrôleurs agissant sur le braquage des roues et sur

les suspensions. Un exemple est celui présenté dans [SY05] où un contrôleur réalisé avec la méthodologie des modes glissants est utilisé. Les auteurs ont prévu d'utiliser deux contrôleurs différents en fonction de la situation dynamique du véhicule. Le premier contrôleur est utilisé lorsque le véhicule est loin d'une situation critique et a pour but de réduire l'action des actionneurs. Lors de l'utilisation de ce premier contrôleur une attention particulière est donnée à l'asservissement de la dérive et de la vitesse de lacet, mais aussi aux mouvements de pompage et de tangage. Ce contrôleur veut assurer la sécurité en agissant sur le contrôle de la dérive et de la vitesse de lacet, mais il veut aussi améliorer la vie à bord en agissant sur le pompage et le tangage. Par contre, lorsque le véhicule est proche d'une situation dangereuse, une deuxième surface est activée. Dans ce cas l'attention est portée sur le contrôle de la dérive et de la vitesse de lacet et les suspensions sont utilisées pour fournir du potentiel aux roues qui sont en perte d'adhérence. Au coeur de ce deuxième contrôleur il y a donc seulement la sécurité.

Dans [HHET93] les auteurs ont proposé une solution pour un véhicule équipé avec quatre roues directrices et quatre roues motrices. Le contrôle de la stabilité du véhicule est réalisé en agissant sur le braquage des roues arrière et à la fois sur la distribution du couple moteur entre les roues avant et arrière. Il est aussi possible de diviser le contrôleur en deux parties. La première est réalisée en boucle ouverte et a pour but d'améliorer la réponse du véhicule lors d'une mise en virage; celle-ci agit seulement sur le braquage des roues arrière. La deuxième, qui est en boucle fermée, a pour but d'assurer la stabilité du véhicule: elle asservit la vitesse de lacet sur une vitesse de lacet de référence. Elle agit à la fois sur le braquage des roues arrière et sur la distribution du couple moteur entre les roues. Le contrôleur en boucle fermée est obtenu par synthèse H_∞ standard. Dans celle-ci les auteurs ont décidé d'utiliser deux filtres de pondération. Le premier, qui est un filtre du deuxième ordre, est utilisé pour limiter la fonction de sensibilité. Le deuxième est utilisé pour contraindre la fonction de sensibilité complémentaire. Il est important de souligner que le contrôleur en boucle fermée est synthétisé pour pouvoir contrôler simultanément le braquage des roues et la répartition du couple moteur.

Une autre solution utilisant plusieurs actionneurs est celle proposée dans [KKY⁺04], qui agit sur trois actionneurs: le freinage, le braquage des roues arrière et les suspensions. Le système prévu dans cette solution a pour but de partager les informations provenant des capteurs et aussi de faire appel à un contrôleur ou à un autre vis-à-vis de la situation de conduite. Les différents contrôleurs sont mis en fonction par rapport à l'angle de dérive du véhicule. Lorsque la voiture a un faible angle de dérive le contrôle antiroulis est utilisé pour asservir la vitesse de lacet et l'angle de roulis du véhicule: comme nous avons vu dans le chapitre précédent si l'erreur sur la vitesse de lacet n'est pas trop importante ce type de contrôleur peut facilement la corriger. Le contrôleur sur le braquage des roues arrière est utilisé pour des angles de dérive plus importants, mais toujours dans une zone linéaire du véhicule. Le contrôle agissant sur le freinage est activé lorsque le véhicule présente des angles de dérive caractéristiques de la zone non linéaire du véhicule.

Dans [Hac04] un système utilisant le braquage avant, le braquage arrière, le freinage et les suspensions actives est présenté. Le but proposé par les auteurs est de faire travailler ensemble les différents contrôleurs. Un superviseur est réalisé pour gérer les conflits et effectuer l'arbitrage entre les contrôleurs. Ce superviseur se présente sous la forme d'une machine d'état qui les active

ou les désactive en fonction de la situation de conduite et des capacités des contrôleurs.

L'évaluation effectuée par le superviseur consiste à voir si un contrôleur peut rejeter la perturbation ou non; s'il peut corriger le véhicule alors il est activé. Il est important de souligner que la solution proposée active un seul contrôleur à la fois.

Une solution utilisant seulement le freinage et le braquage des roues arrière est proposée dans [TEG⁺06]. Les auteurs ont à disposition deux contrôleurs pour asservir le moment de lacet, dirigés comme dans le cas précédent par un superviseur. La solution présentée accepte, à la différence de la précédente, que les deux contrôleurs soient actifs ensemble. Il est par contre question dans ce cas de pondérer les différents contrôleurs, ce choix est fait de façon arbitraire et il change par rapport à la situation de conduite. Les auteurs n'ont proposé aucun critère pour choisir les pondérations, mais ils se sont limités à dire que si on veut faire intervenir un contrôleur de façon plus importante alors il est nécessaire de lui donner un coefficient de pondération plus élevé.

Une solution utilisant les suspensions, les freins et le braquage des roues arrière est proposée dans [Gay00], avec une partie en boucle ouverte et une en boucle fermée. La partie en boucle ouverte pilote les trois actionneurs séparément. Dans la partie dédiée au freinage le contrôleur se limite seulement à demander un couple de freinage aux étriers selon une courbe équiadhérence et à effectuer un report de couple lorsque le véhicule est en virage afin de contrôler le comportement du véhicule en lacet.

La partie dédiée aux suspensions a pour but d'effectuer la tenue de la caisse lors d'un virage. Le contrôleur en boucle ouverte pour le braquage arrière a pour but de réduire la dérive du train en fonction de la vitesse.

L'auteur constate que pour asservir les grandeurs caractéristiques d'un véhicule à des valeurs de référence, il est nécessaire d'utiliser un contrôleur en boucle fermée. Plusieurs cas sont analysés. Il est possible de constater que dans chacun des cas la boucle est fermée seulement sur les suspensions. Si nous considérons, par exemple, la régulation de la vitesse de lacet, l'auteur utilise l'erreur de cette grandeur par rapport à sa référence pour changer la raideur des suspensions du train avant et celle du train arrière afin de contrôler la vitesse de lacet. Néanmoins la correction apportée sur le braquage et sur le freinage n'est jamais faite en boucle fermée.

Il est aussi important de souligner qu'il n'y a pas de communication entre les contrôleurs : chaque contrôleur travaille de façon indépendante des autres. Il est néanmoins vrai qu'il y a un seul contrôleur en boucle fermée, ce qui n'est pas le cas dans les solutions proposés dans [Hac04] et [TEG⁺06].

Dans [SITI92] et [TII92] une solution utilisant plusieurs actionneurs est présentée. Les auteurs ont d'abord calculé les contrôleurs agissant sur chacun des actionneurs. Les contrôleurs élémentaires sont très simples: ce sont des contrôleurs PID. Lorsque ces contrôleurs agissent ensembles les auteurs ont décidé de modifier leurs gains : pour chaque contrôleur les gains sont fonction de la vitesse et du couplage avec les autres contrôleurs.

Une solution utilisant les modes glissants et pilotant tous les actionneurs est proposée dans [MCBS00]. Les auteurs ont aussi pris soin de minimiser une fonction de coût qui est calculée en fonction des commandes. La structure de commande est divisée en deux parties, la première est dédiée au contrôle de la dynamique latérale tandis que la deuxième est dédiée au contrôle de la dynamique de roulis. Cette dernière partie est sensée contrôler seulement le roulis et ne pas s'intéresser au contrôle des autres dynamiques.

Une méthodologie de contrôle non linéaire et prédictive est utilisée dans [HON99]. Ici les auteurs ont supposé utiliser comme commande les quatre pressions de freinage et aussi les braquages des roues avant et arrière. Les auteurs ont aussi constaté que le contrôle du moment de lacet n'est pas possible avec le seul contrôle du braquage des roues arrière : dans certaines situations de conduites la performance qu'il peut fournir s'avère insuffisante.

6.2 Résumé de la partie confidentielle

Nous avons d'abord choisi, parmi les manoeuvres retenues dans le projet de la sécurité active, une manoeuvre où la performance est influencée par l'asservissement de deux grandeurs différentes et en conflit entre elles. Nous avons ainsi pu illustrer que l'utilisation d'un seul contrôleur n'est parfois pas suffisante pour satisfaire la performance et qu'il est donc nécessaire d'utiliser plusieurs contrôleurs afin d'avoir un comportement satisfaisant.

Vue la nécessité de faire travailler ensemble plusieurs actionneurs, nous avons donc présenté deux solutions possibles permettant de piloter l'ensemble des actionneurs présents dans un véhicule. La première solution proposée consiste à faire travailler ensemble plusieurs contrôleurs pilotant chacun un seul actionneur. La deuxième solution consiste dans l'utilisation d'un seul contrôleur pour piloter tous les actionneurs équipant un véhicule.

Nous avons par la suite choisi plusieurs manoeuvres parmi celles utilisées pour évaluer les performances d'un véhicule dans le domaine de la sécurité active, ce qui nous a permis d'évaluer les performances des deux architectures. Vue la multiplicité de situations de la première architecture, nous avons affronté le problème du contrôle en prenant en considération ces différentes conditions.

A partir des résultats obtenus, une analyse comparative des deux architectures a été mise en place. Celle-ci a été menée selon trois points de vue :

- la synthèse du contrôleur
- les performances et la mise au point
- la modularité de la solution

L'éventail des situations de conduites étant très large, il n'est pas possible d'envisager de le satisfaire avec une seule loi de commande, une solution comprenant plusieurs lois est sans doute plus logique. Néanmoins lorsque nous avons plusieurs lois de contrôle, il est nécessaire de prévoir un superviseur capable de faire appel aux bonnes lois au bon moment. C'est pour cette raison

TAB. 6.1 – *Récapitulatif des articles et des méthodologies utilisées*

Article	Actionneurs	Méthodologie et Intérêt
[YKK ⁺ 90]	roues arrière directrices et suspensions actives + ABS	approche en boucle ouverte selon cartographie
[ZKMAEB98]	roues arrière directrice et répartition du freinage + ABS	logique floue
[MHIY92]	quatre roues directrices et répartition du freinage	angle de braquage calculé en boucle ouverte et répartition calculée en boucle fermée en utilisant un contrôleur proportionnelle
[KS02]	quatre roues directrices	retour d'état (2 approches possibles)
[SY05]	quatre roues directrices et suspensions actives	modes glissants évoluant en fonction de la situation de conduite
[HHET93]	roues arrière directrices et répartition couple moteur	angle de braquage calculé en boucle ouverte et en utilisant un contrôleur H_∞ qui lui peut aussi piloter une répartition du freinage
[KKY ⁺ 04]	quatre roues directrices, suspensions actives et répartition du freinage	détermination de l'activation des contrôleurs selon l'état dynamique du véhicule
[Hac04]	quatre roues directrices, suspensions actives et répartition du freinage	présentation d'un superviseur pour la gestion des conflits entre contrôleurs
[TEG ⁺ 06]	roues arrière directrices et répartition du freinage	présentation d'un superviseur pour la gestion des conflits entre contrôleurs
[Gay00]	roues arrière directrices, suspensions actives et répartition du freinage	boucle ouverte pour le braquage et le freinage, optimisation H_2 pour les suspensions
[SITI92] et [TII92]	quatre roues directrices, suspensions actives et freinage	introduction des contrôleurs PID évoluant en fonction de la vitesse, ainsi que leur couplage en utilisant un superviseur
[HON99]	quatre roues directrices et répartition du freinage	commande predictive

que nous avons été obligés de développer un superviseur capable d'activer et de désactiver les contrôleurs par rapport aux grandeurs mesurées. Pour éviter notamment des actions violentes au niveau des actionneurs, une gestion des transitions a été effectuée.

Chapitre 7

Dimensionnement des actionneurs et des capteurs

Dans les chapitres précédents nous avons étudié différentes lois de commande et différentes architectures de contrôle. Lors de ces analyses, nous avons regardé seulement si les contrôleurs pouvaient satisfaire les performances et les critères de plaisir de conduite.

Cette analyse est sans doute nécessaire pour développer une loi de commande, mais elle doit être complétée par une analyse énergétique, pour voir si le contrôleur obtenu n'est pas trop gourmand en énergie. En effet il est souvent possible de trouver un contrôleur capable de satisfaire les performances, mais il demande souvent une puissance qui n'est pas disponible dans le véhicule ou un actionneur trop rapide et qui ne peut donc pas être construit avec la technologie actuelle.

Pour illustrer l'intérêt d'utiliser plusieurs actionneurs permettant d'asservir la même grandeur, nous avons choisi une manoeuvre parmi celles retenues dans le projet de la sécurité active. Nous avons ainsi pu illustrer que l'utilisation d'un seul contrôleur n'est parfois pas suffisante pour satisfaire la performance demandée et qu'il est donc nécessaire d'utiliser plusieurs contrôleurs afin d'avoir un comportement satisfaisant.

Comme le précédent et pour les mêmes raisons de confidentialité, ce chapitre ne peut pas être présenté comme il a été conçu. Pour cette raison nous voulons donner par la suite un rapide résumé des arguments que nous avons exposés dans la version confidentielle.

Nous avons divisé le dimensionnement en deux parties principales, la première dédiée au dimensionnement des actionneurs pour le roulis, la deuxième au dimensionnement des actionneurs permettant de piloter le comportement en lacet du véhicule.

Dans les deux parties, nous avons sélectionné un certain nombre de manoeuvres considérées comme dimensionnantes. Elles nous ont permis de définir soit la puissance nécessaire pour réaliser les lois de commande, soit elles nous ont permis de définir la vitesse et l'amplitude maximales des commandes. Une attention particulière a été dédiée au dimensionnement de la première architecture où nous avons plusieurs contrôleurs agissant ensemble. Le dimensionne-

ment nous a aussi permis d'effectuer une analyse comparative supplémentaire entre les deux architectures en s'appuyant justement sur les caractéristiques des actionneurs demandées par les lois de commande.

En utilisant les caractéristiques des contrôleurs nous avons aussi effectué la définition des caractéristiques des capteurs qui sont nécessaires afin de garantir les performances présentées dans les chapitres précédents. Là aussi nous avons utilisé les situations de conduite dimensionnantes en conservant seulement le cas le plus contraignant.

Chapitre 8

Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, les travaux présentés ont eu pour but de contrôler le comportement d'un véhicule léger afin de garantir la tenue de route et le confort. Tout au long de ce mémoire nous avons structuré notre approche du problème par un choix des lois de commande, une analyse de leurs performances vis-à-vis de certaines situations de conduite et nous avons toujours terminé par leur analyse de robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques. La robustesse et la performance sont sans doute deux paramètres très importants dans le domaine automobile; nous avons toujours cherché à les satisfaire en garantissant aussi le confort. Par simplicité dans ce mémoire nous avons asservi la vitesse de lacet en utilisant tous les degrés de liberté qui sont aujourd'hui disponibles dans le véhicule. Il est néanmoins possible de modifier très facilement nos lois afin d'asservir aussi l'accélération latérale et donc de façon indirecte d'asservir la dérive. Une perspective envisageable à cette thèse est celle d'effectuer le contrôle de la trajectoire en utilisant l'accélération de latérale en plus de la vitesse de lacet qui a été la seule grandeur utilisée dans cette thèse.

Les outils théoriques nécessaires au développement et à l'analyse des lois de commande nous ont été fournis par les méthodologies H_∞ et LPV et la μ -analyse. Une fois rappelées leurs principales caractéristiques et après avoir développé la modélisation du véhicule, nous avons logiquement pu introduire les lois élémentaires. La deuxième partie a donc eu pour but d'introduire et d'analyser les performances atteignables avec des contrôleurs capables de piloter un seul actionneur. Cette analyse nous a aussi permis de proposer des solutions innovantes du point de vue du contrôle monoactionneur : un contrôle utilisant le carrossage actif a été introduit. Au cours de cette thèse nous avons aussi développé une approche LPV avec vitesse de variation des paramètres limitée [PDP06], qui est reproduit en Annexe D.

Ayant à disposition tous les contrôleurs agissant sur un seul actionneur, nous avons pu passer à l'analyse d'une nouvelle structure de commande comprenant un seul contrôleur agissant sur deux ou plusieurs actionneurs. La troisième partie a donc été consacrée à l'analyse des avantages et des inconvénients d'une architecture utilisant de façon intelligente plusieurs contrôleurs agissant chacun sur un seul actionneur par rapport à l'utilisation d'un seul contrôleur agissant sur tous les actionneurs. Nous avons analysé les points forts et les points faibles d'une architecture par rapport à l'autre. Dans cette partie, nous avons pu constater que le choix des actionneurs utilisables ne peut pas être effectué de façon fixe et exhaustive : vis-à-vis de la performance visée

et de la situation de conduite, différentes combinaisons sont envisageables. Pour des raisons de confidentialité, nous ne pouvons pas illustrer plus en détail les combinaisons retenues, vis-à-vis de l'état dynamique du véhicule. Néanmoins il est important de souligner que tous les systèmes de sécurité active ne pourront jamais aller au delà de la volonté du conducteur et surtout au delà des limites de la physique. Dans ce mémoire nous avons aussi introduit un contrôleur permettant d'asservir le mouvement en roulis et nous avons donc apporté une solution au pilotage d'un des degrés de liberté agissant sur le confort du véhicule.

Ayant à disposition toutes les lois de commande nous avons pu introduire le dimensionnement des actionneurs et des capteurs. Cette quatrième partie nous a donc permis d'introduire les caractéristiques des actionneurs nécessaires pour satisfaire les performances présentées dans le mémoire. En analysant les résultats obtenus, nous avons pu constater que les lois de commande proposées ont des besoins en terme de dynamique et d'amplitude de la commande qui peuvent être satisfaits en utilisant des actionneurs classiques. Cette caractéristique a été vérifiée pour les deux architectures présentées et donc nous n'avons pas pu les départager vis-à-vis du choix des actionneurs.

Plusieurs sujets ont été abordés pendant cette thèse néanmoins nous avons encore plusieurs problèmes ouverts, soit d'un point de vue de la validation des performances, soit d'un point de vue automatique, soit d'un point de vue d'implantation des lois dans un véhicule. En commençant d'un point de vue applicatif, il serait intéressant de vérifier les performances obtenues sur un prototype : les résultats que nous avons présentés ont été obtenus en effet en utilisant des simulateurs. Si par contre nous regardons l'aspect automatique, nous pouvons explorer différents chemins : celui de la loi de commande et celui de la robustesse. Commençons d'abord avec celui de la loi de commande, il est évident qu'il est possible d'approfondir soit la synthèse des lois de commande en utilisant une méthodologie LPV avec informations sur la vitesse des paramètres, soit des méthodologies de commande LPV avec contrainte d'ordre pour garantir l'implantabilité du contrôleur dans le véhicule. Il serait aussi intéressant de mettre en place une analyse de robustesse adaptée aux systèmes LPV, pour compléter les indications fournies par la μ -analyse, dans laquelle les paramètres incertains sont supposés fixes. L'approche dissipative proposée dans [Sco97], par exemple, consiste pour cela une piste intéressante.

Pour conclure nous pensons qu'il serait aussi intéressant de réaliser des lois de commande pilotant le freinage en contrôlant le glissement des roues et non en agissant sur les pressions comme nous avons fait dans cette thèse. Ce choix va nous permettre de piloter aussi les couches basses du système de freinage.

Annexe A

Pneumatique

Vue l'importance que le pneumatique occupe dans la dynamique du véhicule, un intérêt particulier sera réservé à la présentation des principaux modèles de pneumatique, pour donner au lecteur une idée de la complexité de cette partie du véhicule. Plusieurs modélisations sont disponibles pour décrire le comportement du pneumatique, nous nous limitons à en introduire trois. Nous présenterons d'abord deux modèles théoriques qui sont le modèle Brush et le modèle LuGre, ensuite nous regarderons le modèle expérimental de Pacjeka.

A.1 Modèle Brush

Dans le modèle Brush, le pneumatique est modélisé par des fibres élastiques (Figure A.1) qui sont en contact avec le plan de la route et qui peuvent subir des déformations dans la direction parallèle à ce plan. Naturellement le pneumatique peut se trouver dans différentes situations: il est possible qu'il soit en dérive pure, en glissement longitudinal pur ou dans une combinaison des deux. Nous présenterons dans la suite les caractéristiques des différentes situations en suivant l'ordre qu'on vient de faire.

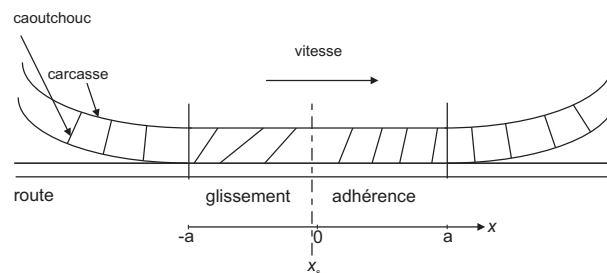


FIG. A.1 – *Schéma Modèle Brush*

Dérive pure Nous commençons par la situation de dérive pure. Le pneumatique est dans cette situation lorsque la force disponible dans la zone de contact devient inférieure à la force nécessaire pour continuer à faire avancer le pneumatique dans la même direction. Il est d'abord

nécessaire de définir une distribution de l'effort normal présent sur le pneumatique. Il peut être intéressant d'utiliser la distribution présentée dans [Pac02], qui est de type parabolique et peut être formulée selon l'équation suivante:

$$q_z = \frac{3F_z}{4a} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right\}$$

F_z est l'effort normal, a est la moitié de la longueur de la surface de contact et x est la position sur la surface de contact. Il est possible d'en déduire la distribution de l'effort latéral, qui est formulée selon l'équation suivante:

$$|q_{y,max}| = \mu q_z = \frac{3}{4} \mu F_z \frac{a^2 - x^2}{a^3}$$

Nous savons que la longueur de la zone de contact est logiquement $2a$; cette longueur peut être exprimée facilement en fonction de la charge sur le pneumatique. Il est en effet possible d'obtenir l'expression suivante:

$$a = c_1 F_z + c_2 \sqrt{F_z}$$

Une fois qu'on a la zone de contact, on peut la diviser en deux parties, une partie de glissement et une partie d'adhérence. Il est possible de calculer aussi la déformation latérale du pneumatique dans la zone d'adhérence qui sera exprimée par l'équation suivante:

$$\nu = (a - x) \tan(\alpha)$$

Pour rendre plus lisible les équations qui suivront l'expression suivante est introduite.

$$\theta_y = \frac{2c_{py}a^2}{3\mu F_z}$$

c_{py} est la raideur latérale d'une soie. La distance entre le bord d'attaque et la zone de frontière entre la zone d'adhérence et celle de glissement est $2a\lambda$.

En partant des équations précédentes, nous pouvons introduire les équations suivantes:

$$|q_y| = c_{py} (a - x_t) |\tan(\alpha)| = |q_{y,max}| = \frac{c_{py}}{2a\theta_y} (a - x_t) (a + x_t) \quad (\text{A.1})$$

$$\text{avec } \lambda = (a - x_t)/2a \quad \text{nous obtenons} \quad (\text{A.2})$$

$$\lambda = 1 - \theta_y |\tan(\alpha)| \quad (\text{A.3})$$

Lorsque le pneumatique commence à glisser, nous pouvons constater que les valeurs suivantes sont vérifiées: $\lambda = 0$ et $\tan(\alpha_{sl}) = 1/\theta_y$.

Pour pouvoir déterminer l'effort latéral et le moment d'auto-alignement, il est nécessaire de connaître la distribution des fibres. Celle-ci n'est pas connue dans la plupart de cas. Pour

déterminer la force latérale et le moment d'auto-alignement, il est possible de calculer une intégrale sur la zone de contact. La division suivante de la zone de contact peut être effectuée : zone de glissement $-a < x < x_t$ et zone d'adhérence $x_t < x < a$.

Pour simplifier, l'équation suivante est introduite :

$$\sigma_y = \tan(\alpha)$$

Pour les deux zones définies précédemment il est possible d'écrire les équations suivantes :

– pour $|\alpha| < \alpha_{sl}$

$$\begin{aligned} F_y &= \mu F_z (1 - \lambda^3) \operatorname{sgn}(\alpha) = 3\mu F_z \theta_y \sigma_y \left\{ 1 - |\theta_y \sigma_y| + \frac{1}{3} (\theta_y \sigma_y)^2 \right\} \\ M_z &= -\mu F_z \lambda^3 a (1 - \lambda) \operatorname{sgn}(\alpha) = -\mu F_z a \theta_y \sigma_y \left\{ 1 - 3|\theta_y \sigma_y| + 3(\theta \sigma)^2 - |\theta \sigma|^3 \right\} \end{aligned}$$

– pour $|\alpha| > \alpha_{sl}$

$$\begin{aligned} F_y &= \mu F_z \operatorname{sgn}(\alpha) \\ M_z &= 0 \end{aligned}$$

Glissement longitudinal pur Nous considérons maintenant le cas du glissement pur. Le pneumatique se trouve dans cette situation lorsque la vitesse effective d'avancement est différente du produit entre le rayon du pneumatique et la vitesse de rotation de la roue. Normalement cette situation est vérifiée chaque fois qu'un effort est appliqué à la roue. Pour rendre plus claire notre discours, il est intéressant d'introduire la définition du glissement théorique :

$$\sigma_x = \frac{V_{sx}}{V_r} = \frac{\chi}{1 + \chi}$$

Lorsque le glissement théorique est connu, il est possible de calculer la déformation longitudinale u . Cette grandeur a une expression qui est très proche de celle obtenue précédemment pour l'angle de dérive :

$$u = (a - x) \sigma_x \quad (\text{A.4})$$

Il est donc possible de s'apercevoir qu'il y a des similitudes entre ce cas et celui analysé précédemment. Il est possible de constater que l'expression de la déformation latérale (A.1) est similaire à celle de la déformation longitudinale (A.4). Dans le cas latéral il y avait la raideur c_{py} , tandis que maintenant il y a la raideur c_{px} . Si les deux raideurs sont identiques alors les adhérences le sont également.

Il est possible de trouver la formulation suivante pour déterminer l'instant dans lequel le pneumatique commence à glisser :

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_{sl} = -\frac{1}{1 \pm \theta_x} \\ \text{avec} \\ \theta_x &= \frac{2 c_{px} a^2}{3 \mu F_z} \end{aligned}$$

La force longitudinale sera donc exprimée par l'équation suivante:

$$F_x = 2c_{px}a^2\chi$$

Pour conclure nous voulons faire observer qu'il est possible de retrouver la valeur de la raideur longitudinale, son expression sera :

$$C_{F\chi} = (\partial F / \partial \chi)_{\chi=0} = 2c_{px}a^2$$

Combinaison de la dérive et du glissement longitudinal Dans les paragraphes précédents nous les avons analysé séparément, il est maintenant possible de regarder l'influence de la composant longitudinale sur celle latérale et sur le moment d'auto alignement. Certaines hypothèses sont nécessaires, celles proposées dans [Pac02] sont les suivantes :

$$\begin{aligned} c_p &= c_{px} = c_{py} \\ \mu &= \mu_x = \mu_y \end{aligned}$$

Nous avons deux grandeurs, il n'est donc pas possible de définir le glissement théorique comme un scalaire, mais il est nécessaire de le définir sous forme vectorielle, en utilisant les équations suivantes:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = -\frac{V_s}{V_r} = \frac{1}{V_r} \begin{bmatrix} V_{sx} \\ V_{sy} \end{bmatrix}$$

Il est donc possible de déduire la zone de déformation, son équation sera donc :

$$\mathbf{e} = (a - x)\sigma$$

En connaissant la zone de déformation, la force dans cette zone sera exprimée par l'équation suivante:

$$\mathbf{q} = c_p (a - x) \sigma$$

Il est aussi possible de déterminer la force dans la zone de glissement, qui est définie par l'équations suivante:

$$\mathbf{q} = -\frac{\sigma}{|\sigma|} \mu q_z |\sigma| = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

En utilisant ces équations, il est possible de déterminer le module de la force:

– pour $|\sigma| \leq \sigma_{sl}$

$$F = \mu F_z (1 - \lambda^3) = \mu F_z \{ 3\theta|\sigma| - 3(\theta|\sigma|)^2 + (\theta|\sigma|)^3 \}$$

– pour $|\sigma| \geq \sigma_{sl}$

$$F = \mu F_z$$

De façon équivalente, il est possible de déterminer le moment d'auto-alignement, qui sera exprimé par l'équation suivante:

$$M_z = M_{z,0} - c_p F_x F_y - F_x \nu_0$$

A.2 Modèle LuGre

Un autre modèle de pneumatique utilisant le concept de fibre est le modèle LuGre. Ce modèle part de la constatation que lorsqu'une force tangentielle est appliquée au pneumatique les fibres ont tendance à se déformer comme des ressorts. Dans la littérature, il est possible de trouver deux modèles de contact pneu-sol utilisant cette idée. Dans le premier le contact est considéré comme ponctuel ([dWOAL95]), tandis que dans le deuxième le contact entre le pneumatique et la route est supposé être une surface ([dWT99] et [dWTV⁺03]). Les deux modèles sont définis seulement pour la dynamique longitudinale. Nous présenterons dans la suite ces deux modèles.

Modèle ponctuel Nous considérons d'abord le modèle où le contact est supposé ponctuel. Un exemple de modélisation est présenté dans [dWOAL95],; nous en reporterons seulement ici les équations principales:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= v_r - \frac{\sigma_0 |v_r|}{g(v_r)} z \\ F &= (\sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v_r) F_n \\ \text{avec} \\ g(v_r) &= \mu_C + (\mu_S - \mu_C) e^{-|v_r - v_c|^\alpha}\end{aligned}$$

Dans les équations précédentes il est possible de trouver la raideur des fibres σ_0 , leur coefficient d'amortissement σ_1 , le coefficient d'amortissement relatif σ_2 , le coefficient de frottement de Coulomb μ_C , le frottement statique μ_S ($\mu_C \leq \mu_S \in [0,1]$), la vitesse relative de Stribeck v_S , l'effort normal F_n , la vitesse relative $v_r = (r\omega - v)$ et l'état de frottement interne z . Nous retrouvons donc certains des paramètres caractéristique des modèles de frottement.

Il faut rappeler que la variable α est utilisée pour garantir le gain statique de la fonction.

Modèle distribué Nous pouvons maintenant analyser le cas où le contact s'applique sur une surface. Nous pouvons d'abord introduire une distribution $z(\zeta, t)$, pour définir le frottement de la soie qui est positionnée au point ζ à l'instant t . Une fois que cette distribution est introduite, il est possible d'effectuer l'extension du modèle ponctuel au modèle distribué. Les équations illustrant ce modèle sont les suivantes:

$$\begin{aligned}\dot{z}(\zeta, t) &= v_r - \frac{\sigma_0 |v_r|}{g(v_r)} z \\ F &= \int_0^L \delta F(\zeta, t) D\zeta \\ \delta F &= (\sigma_0 \delta z + \sigma_1 \delta \dot{z} + \sigma_2 v_r) \delta F_n \\ \text{avec} \\ g(v_r) &= \mu_C + (\mu_S - \mu_C) e^{-|v_r - v_c|^\alpha} \\ \delta F_n &= F_n / L\end{aligned}$$

En utilisant les équivalents (A.5) et (A.6), il est possible de définir l'équation (A.7)

$$\dot{\zeta} = |r\omega| \tag{A.5}$$

$$\frac{dz}{dt}(\zeta, t) = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{dz}{dt}(\zeta, t) = \frac{\partial z}{\partial \zeta}(\zeta, t) |r\omega| + \frac{\partial z}{\partial t}(\zeta, t) = v_r - \frac{\sigma_0 |v_r|}{g(v_r)} z(\zeta, t) \quad (\text{A.7})$$

Il est maintenant nécessaire d'introduire la distribution des efforts normaux $f_n(\zeta)$, telle qui sera utilisée par la suite pour déterminer les efforts du pneumatique ainsi que les moments d'auto-alignement. Le modèle introduit est valable pour la dynamique longitudinale, une extension aux autres dynamiques est présentée dans ([VTdWS05]). Les équations généralisant le comportement longitudinal du pneumatique aux autres dynamiques sont reportées dans la suite:

$$\begin{cases} i = x, y \\ \frac{dz_i}{dt}(\zeta, t) = \frac{\partial z_i}{\partial \zeta}(\zeta, t) |r\omega| + \frac{\partial z_i}{\partial t}(\zeta, t) = v_r - \frac{\sigma_0 |v_r|}{g(v_r)} z_i(\zeta, t) \\ \mu_i(\zeta, t) = \sigma_{0_i} z_i(\zeta, t) + \sigma_{1_i} \frac{\partial z_i(\zeta, t)}{\partial t} - \sigma_{2_i} v_{r_i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i = x, y \\ F_i(\zeta, t) = \int_0^L \mu_i(\zeta, t) f_n(\zeta) d\zeta \\ M_z(t) = - \int_0^L \mu_y(\zeta, t) f_n(\zeta) \left(\frac{L}{2} - \zeta \right) d\zeta \end{cases}$$

Le modèle suppose que l'effort normal soit uniformément distribué sur toute la surface de contact et que chaque point de la surface de contact possède la même vitesse v_r . Une analyse comparative entre la formule magique et le modèle LuGre est réalisée dans [dWT99].

A.3 Modèle de Pacejka ou formule magique

A.3.1 Dynamiques isolées

Une des formules plus connues dans le domaine de la dynamique du pneumatique est la "magic formula model" aussi connue sous le nom de modèle de Pacejka. Elle fut introduite pour la première fois en [BNP87] et ensuite complétée en [BPL89]. Cette modélisation s'appuie sur des données expérimentales, tandis que les modélisations précédentes s'appuient sur la modélisation du frottement entre le pneumatique et la route.

En observant les données expérimentales (Figure A.8) les auteurs ont constaté qu'une formulation sinusoïdale du type $Y = D \sin(BX)$ fournissait des résultats plus satisfaisantes que l'approximation polynomiale proposée dans [Sit83]; ici aussi la modélisation était réalisée en partant des données numériques. Ils ont donc fourni une expression valable pour les mouvements latéraux et/ou pour les mouvements longitudinaux. Dans les deux cas les équations ont la structure suivante (la même équations est aussi valable pour l'auto alignement du véhicule):

$$\begin{aligned} y(x) &= D \sin(C \arctan\{Bx - E(Bx - \arctan(Bx))\}) \\ Y(X) &= y(x) + S_v \\ X &= X + S_h \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

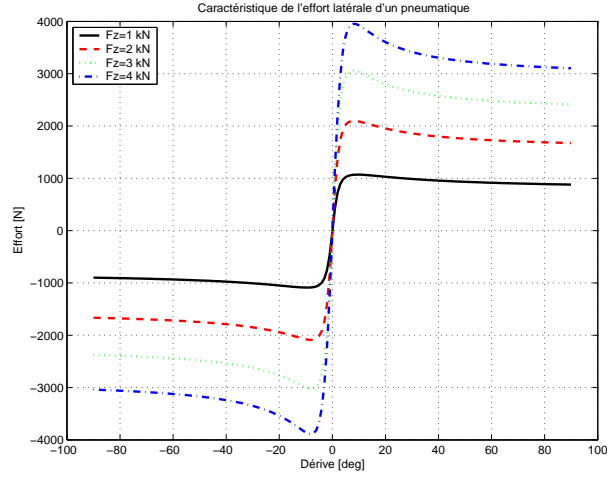


FIG. A.2 – *Caractéristique de l'effort latérale d'un pneumatique*

$Y(X)$ peut être soit la force latérale, soit la force de freinage, soit le moment d'auto alignement et X représente l'angle de dérive α ou le glissement longitudinal κ . Il est possible de constater que les coefficients choisis ont un sens: D est utilisé pour indiquer le pic de la courbe du pneumatique, C est le facteur de forme de la courbe, B représente le facteur de raideur, tandis que E est dédié à la description de la courbure.

La modélisation présentée dans (A.8) a aussi deux facteurs de décalage: S_h qui est le décalage horizontal et S_v qui est le décalage vertical. Ces deux décalages sont conséquences de la résistance de roulement et de l'angle de carrossage. Cette formulation peut être appliquée à tous les comportements du pneumatique en changeant seulement les valeurs des coefficients précédents. Nous reportons ici les coefficients dans les trois cas précédemment illustrés.

Pour les efforts latéraux:

$$\begin{aligned} D &= \mu_{ym} F_z = a_1 F_z^2 + a_2 F_z \\ BCD &= a_3 \sin \left(2 \arctan \left(\frac{F_z}{a_4} \right) \right) (1 - a_5 |\gamma|) \\ C &= a_0 \\ E &= a_6 F_z + a_7 \\ B &= \frac{BCD}{CD} \\ S_h &= a_8 \gamma + a_9 + F_z + a_{10} \\ S_v &= a_{11} F_z \gamma + a_{12} F_z + a_{13} \end{aligned}$$

Pour les efforts longitudinaux:

$$\begin{aligned} D &= \mu_{ym} F_z = b_1 F_z^2 + b_2 F_z \\ BCD &= (b_3 F_z^2 + b_4 F_z) e^{-b_5 F_z} \\ C &= b_0 \\ E &= b_6 F_z^2 + b_7 F_z + b_8 \\ B &= \frac{BCD}{CD} \\ S_h &= b_9 F_z + b_{10} \\ S_v &= 0 \end{aligned}$$

Dans le cas du moment d'auto alignement:

$$\begin{aligned}
D &= c_1 F_z^2 + c_2 F_z \\
BCD &= (c_3 F_z^2 + c_4 F_z) (1 - c_6 |\gamma|) e^{-c_5 F_z} \\
C &= C_0 \\
E &= (c_7 F_z^2 + c_8 F_z + c_9) (1 - c_{10} |\gamma|) \\
B &= \frac{BCD}{CD} \\
S_h &= c_{11} \gamma + c_{12} F_z + c_{13} \\
S_v &= (c_{14} F_z^2 + c_{15} F_z) \gamma + c_{16} F_z + c_{17}
\end{aligned}$$

A.3.2 Couplage des efforts

Le modèle fourni ne considère pas, pour l'instant, les couplages entre les différentes dynamiques. Le premier couplage est celui entre les dynamiques latérale et longitudinale. Pour commencer, il est intéressant de considerer les deux glissements; en partant de leur définition, il est possible de calculer le glissement global du pneumatique:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{V_{sx}}{V_r} \\
\sigma_y &= \frac{V_{sy}}{V_r} \\
\sigma &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}
\end{aligned}$$

En ayant la valeur du glissement, il est possible de calculer les efforts des différentes dynamiques:

$$\begin{aligned}
F_x &= -(\sigma_x / \sigma) F(\sigma) \\
F_y &= -(\sigma_y / \sigma) F(\sigma)
\end{aligned}$$

On a donc une relation entre les glissements théoriques et les glissements pratiques (α et κ) qui ont été utilisés précédemment:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= V_{sx} / V_r = -\kappa / (1 + \kappa) \\
\sigma_y &= V_{sy} / V_r = -\tan(\alpha) / (1 + \kappa)
\end{aligned}$$

Nous pouvons en déduire les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
V_{sx} / V_r &= -\kappa \\
V_{sy} / V_r &= -\tan(\alpha)
\end{aligned}$$

Vue la présence de la résistance au roulement et du carrossage, il y aura un décalage vertical et un décalage horizontal. Ces deux décalages impliqueront des modifications dans les équations du glissement, les glissements théoriques devenant:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_{tot}} &= V_{sx_{tot}} / V_r = -\kappa / (1 + \kappa) - \delta\kappa / (1 - \delta\kappa) \\
\sigma_{y_{tot}} &= V_{sy_{tot}} / V_r = -\tan(\alpha) (1 + \kappa) + \tan(-\delta\alpha) \\
\sigma_{tot} &= \sqrt{\sigma_{x_{tot}}^2 + \sigma_{y_{tot}}^2}
\end{aligned}$$

Les valeurs maximales des glissements peuvent être différentes dans les deux cas et donc il est nécessaire d'introduire des glissements normalisés.

$$\begin{aligned}\sigma_x^* &= \sigma_{x_{tot}} / \sigma_{xm_{tot}} \\ \sigma_y^* &= \sigma_{y_{tot}} / \sigma_{ym_{tot}} \\ \sigma^* &= \sqrt{\sigma_x^{*2} + \sigma_y^{*2}}\end{aligned}$$

Il est maintenant possible de définir les efforts longitudinaux et latéraux en considérant le couplage des dynamiques:

$$\begin{aligned}F_{x_0}^* &= F_{x_0} - \varepsilon (F_{x_0} - F_{y_0}) (\sigma_y^* / \sigma^*)^2 \\ F_{y_0}^* &= F_{y_0} - \varepsilon (F_{y_0} - F_{x_0}) (\sigma_x^* / \sigma^*)^2\end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \sigma^* & \text{pour} & \quad \sigma^* < 1 \\ \varepsilon &= 1 & \text{pour} & \quad \sigma^* > 1\end{aligned}$$

En considérant les effets de conicité, il est possible de modifier comme suit les équations des efforts:

$$\begin{aligned}F_x &= -F_{x_0}^* \cos(\lambda) \operatorname{sgn}(\sigma_x^*) \\ F_y &= -F_{y_0}^* \sin(\lambda) \\ F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2}\end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned}\lambda &= 23 (\psi + \theta - \eta) \arctan(q_1 \sigma^{*2}) / \pi + \eta \\ \eta &= \arctan(\sigma_y^* / |\sigma_x^*|) \\ \theta &= \arctan(\sigma_{y_{tot}} / |\sigma_{x_{tot}}|) \\ \psi &= 2\Phi (\theta - \eta) \arctan(q_2 |\kappa| (1 - |\kappa|)) / \pi \\ \Phi &= 1 / (q_3 |\alpha|^{q_4} / F_z + q_5)\end{aligned}$$

Pour conclure il est possible d'associer les efforts avec le moment d'auto alignement et d'obtenir les équations suivantes:

$$\begin{aligned}M_z &= M'_z + (s_1 F_z + (s_2 F_z + s_3) \gamma + s_4) F_z \\ M'_z &= -t F_y + M_{zr} \\ \begin{cases} M_{zr} = M_{z_0} (1 + \cos(\pi \sigma^*)) / 2 \\ M_{zr} = 0 \end{cases} & \text{pour} \quad \begin{cases} \sigma^* < 1 \\ \sigma^* > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Annexe B

Modèles de référence

B.1 Modèle de référence pour la vitesse de lacet

Plusieurs solutions sont présentes dans la littérature, nous introduirons seulement les principales.

Dans la plupart des cas le modèle de référence pour la vitesse de lacet de référence est obtenu à partir d'un modèle bicyclette classique:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{c_F + c_R}{mv} & \frac{c_R l_R - c_F l_F}{mv^2} - 1 \\ \frac{c_R r l_R - c_F l_F}{J_z} & -\frac{c_R l_R^2 + c_F l_F^2}{J_z v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_F}{mv} \\ \frac{c_F l_F}{J_z} \end{bmatrix} \delta_w \\ \dot{\psi} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

La notation est la même que celle du modèle 5.8 (page 75). En partant de ce modèle, il est possible de trouver différentes solutions pour obtenir la vitesse de lacet à partir de l'angle volant fourni par le conducteur.

Solution Bosch La première solution que nous présentons est celle introduite dans plusieurs brevets et articles réalisés par Bosch, comme par exemple, [ZEP⁺96] et [HMEH95]. La même démarche est aussi présentée dans [KN05]. Il est évident qu'un modèle de référence doit avoir une partie statique et une partie dynamique. La partie statique est obtenue à partir du modèle bicyclette (B.1) en recherchant la relation entre l'angle volant et la vitesse de lacet.

$$\dot{\psi} = \frac{1}{l} \frac{v}{1 + \frac{v^2}{v_{car}^2}} \delta_w \quad (\text{B.2})$$

$$\text{avec } v_{car} = \sqrt{\frac{c_F c_R l^2}{m (c_R l_R - c_F l_F)}} \quad (\text{B.3})$$

Il est possible de constater que l'accélération latérale est égale au produit entre la vitesse et la vitesse de lacet pour des angles de dérive faibles:

$$a_y = V_x \dot{\psi}$$

Il est aussi vrai que l'accélération est limitée par l'adhérence ; il est donc possible d'écrire la relation suivante

$$|a_y| \leq \mu$$

Il sera donc dans ce cas nécessaire de limiter la vitesse de lacet. Une limitation qui dérive est la suivante :

$$|\dot{\psi}| \leq \frac{a_y}{V_x} \leq \frac{\mu}{V_x}$$

Une autre approche est celle proposée dans [HMEH95]. Ici les auteurs ont choisi d'utiliser une approche en temps discret au lieu d'une approche continue. Deux coefficients sont définis :

$$g_{refa} = \frac{1}{l} \frac{v}{1 + \frac{v^2}{v_{car}^2}} \quad (\text{B.4})$$

$$g_{refb} = \left\| \frac{\mu_a g}{v \delta_w} \right\| \quad (\text{B.5})$$

La première expression est l'expression classique du cas statique pour une adhérence unitaire, tandis que la deuxième est liée au cas où l'adhérence est inférieure. L'adhérence du véhicule est μ_a . Entre les deux coefficients nous avons la relation suivante :

$$g_{refb} \leq g_{refa} \quad (\text{B.6})$$

Nous pouvons définir en partant de ces deux coefficients deux vitesses de lacet caractéristiques :

$$w_a = g_{refa} \delta_w \quad (\text{B.7})$$

$$w_b = g_{refb} \delta_w \quad (\text{B.8})$$

Les auteurs ont envisagé de générer une consigne de vitesse de lacet permettant d'accroître la manoeuvrabilité sur basse adhérence, donc la vitesse de lacet de référence doit accepter d'avoir une surtension. Afin de faire ça, ils ont utilisé l'angle de braquage et son gradient.

$$dtl_{lenk} = \frac{\partial}{\partial t} \delta_w p_{lenk} \quad (\text{B.9})$$

où p_{lenk} est un coefficient choisi pour typer le véhicule.

Afin d'obtenir une surtension de la vitesse de lacet, il est nécessaire d'accepter une vitesse de lacet supérieure à w_b . Une combinaison entre w_a et w_b est la solution choisie par les auteurs. La vitesse de lacet de référence w_s est définie par l'équation suivante :

$$w_s(k+1) = w_s(k) + \frac{\tau}{t_{ref}} [dtl_{lenk} * p_{max} + w_a + (1 - dtl_{lenk}) w_b - w - s(k)] \quad (\text{B.10})$$

où τ est le pas de calcul, t_{ref} est la constante de temps du modèle et p_{max} est un coefficient pour déterminer l'ampleur de la surtension.

Solution Mando Dans la solution proposée dans [KKLH03], le modèle de référence est développé à partir du modèle bicyclette (B.1). Les auteurs affirment que le modèle n'est pas suffisamment représentatif du véhicule lorsque celui est dans une zone non linéaire. C'est pour cette raison qu'ils ont décidé d'utiliser une cartographie pour décrire le comportement du véhicule lorsque celui-ci est dans une zone fortement non linéaire. Il est aussi important d'introduire une limitation sur la vitesse de lacet comme nous avons déjà vu dans le cas précédent. Ici encore les auteurs ont décidé d'utiliser une cartographie afin de déterminer la saturation de cette grandeur. Un autre modèle est aussi prévu pour limiter aussi dans certains cas la dérive du véhicule.

Le modèle de référence sera donc un mélange des trois modèles que nous venons de rappeler. La combinaison des trois modèles doit permettre de réduire le critère suivant :

$$J = \int \left(K_P (\dot{\psi}_{mes} - \dot{\psi}_{ref}) + K_D \frac{d(\dot{\psi}_{mes} - \dot{\psi}_{ref})}{dt} \right) dt$$

Le critère minimisé est un critère quadratique où les gains K_D et K_P sont deux coefficients permettant de connaître la situation du véhicule (survirage ou sousvirage) ; dans un cas de survirage les deux coefficients sont faibles, tandis que dans un cas de sousvirage ils ont plus d'importance.

Solution Delphi La solution proposée dans [Wan98] considère elle aussi comme point de départ le modèle bicyclette (B.1). En partant du modèle il est possible comme dans les cas précédents d'obtenir la valeur statique (5.9) de la vitesse de lacet en fonction de la vitesse.

En partant du modèle et de la valeur statique, il est possible de construire la consigne de la vitesse de lacet pour un véhicule. L'auteur décide alors d'utiliser un seuil sur la vitesse du véhicule. Lorsque la vitesse est inférieure à ce seuil la vitesse de lacet de référence correspond à la valeur statique ; par contre lorsque la vitesse du véhicule est supérieure à ce seuil, la vitesse de lacet est calculée en utilisant le modèle bicyclette. Il y aura donc une composante dynamique dans la consigne lorsque la vitesse est supérieure au seuil.

L'auteur trouve cette solution pas encore satisfaisante ; c'est pour cette raison qu'il a décidé de modifier la vitesse de lacet par rapport à la valeur de l'angle de dérive : lorsque cet angle dépasse un certain seuil la vitesse de lacet est corrigée. Cette correction est apportée afin de réduire la vitesse de lacet lorsque l'angle de dérive est trop important :

$$\hat{\dot{\psi}} = \dot{\psi} \pm S(\dot{\beta})$$

Annexe C

Réalisation du modèle pour la μ -analyse

Nous avons décidé d'introduire ici un exemple de calcul du modèle qui est utilisé pour l'analyse de robustesse. Différentes analyses ont été introduites au cours de ce mémoire, nous en considérerons seulement une: les autres modèles peuvent être déduits de façon équivalente. Nous présenterons donc le modèle utilisé pour l'analyse de robustesse, lorsque les commandes sont les pressions de freinage.

La première démarche à suivre, pour construire le modèle pour la μ -analyse est d'introduire les équations de la dynamique latérale du véhicule:

$$m\ddot{y} = -\sum_{i=1}^4 C_i \left(\frac{\dot{y}}{V} - \psi \right) - \frac{1}{V} \sum_{i=1}^4 (C_i x_i \dot{\psi}) + \sum_{i=1}^4 \left(C_i \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi + C_{\gamma} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \phi \right) \quad (\text{C.1})$$

$$J_x \ddot{\phi} = -\sum_{j=1}^2 (\chi_j \phi) - \sum_{j=1}^2 (\Gamma_j \dot{\phi}) + J_s V \dot{\psi} + \sum_{j=1}^2 \frac{t_j}{2} (F_{g_j} - F_{d_j}) \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} I_z \ddot{\psi} = & -\sum_{i=1}^4 C_i x_i \left(\frac{\dot{y}}{V} - \psi \right) - \frac{1}{V} \sum_{i=1}^4 (C_i x_i^2 \dot{\psi}) + \\ & + \sum_{i=1}^4 \left(C_i x_i \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi + C_{\gamma_i} x_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \phi \right) + \sum_{i=1}^4 (y_i F_{x_i}) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_2 = \delta_{AV} \\ \delta_3 &= \delta_4 = \delta_{AR} \\ x_1 &= x_2 = x_{AV} \\ x_3 &= x_4 = x_{AR} \\ y_1 &= y_3 = y_g \\ y_2 &= y_4 = y_d \end{aligned}$$

Les paramètres incertains utilisés lors de l'analyse de robustesse sont la masse m , la rigidité de dérive C_i , la vitesse V et les positions des roues par rapport au centre de gravité x_i et y_i . En introduisant les incertitudes, il est possible d'écrire les paramètres sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_i = C_{i_{nom}} + \delta_C C_{i_{inc}} \\ \frac{1}{m} = \frac{1}{m_{cen}} + \delta_m \frac{1}{m_{inc}} \\ \frac{1}{V} = \frac{1}{V_{cen}} + \delta_V \frac{1}{V_{inc}} \\ x_{AV} = x_{AV_{nom}} + \delta_x x_{AV_{inc}} \\ x_{AR} = x_{AR_{nom}} + \delta_x x_{AR_{inc}} \\ y_g = y_{g_{nom}} + \delta_y y_{g_{inc}} \\ y_d = y_{d_{nom}} + \delta_x y_{d_{inc}} \end{array} \right. \quad (C.4)$$

Pour simplifier le calcul nous avons décidé d'introduire les incertitudes équation par équation; nous introduisons d'abord toutes les incertitudes dans l'équation (C.1) et ensuite nous effectuons la même chose pour les équations (C.2) et (C.3).

Nous considérons d'abord les incertitudes sur les raideurs de dérive des pneumatiques, les signaux intermédiaires suivants sont donc introduits:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = C_{1_{inc}} \left(\frac{\dot{y}}{V} - \frac{\partial \delta_{AV}}{\partial \phi} \phi - \psi + \frac{x_1 \dot{\psi}}{V} \right) \\ z_2 = C_{2_{inc}} \left(\frac{\dot{y}}{V} - \frac{\partial \delta_{AV}}{\partial \phi} \phi - \psi + \frac{x_2 \dot{\psi}}{V} \right) \\ z_3 = C_{3_{inc}} \left(\frac{\dot{y}}{V} - \frac{\partial \delta_{AR}}{\partial \phi} \phi - \psi + \frac{x_3 \dot{\psi}}{V} \right) \\ z_4 = C_{4_{inc}} \left(\frac{\dot{y}}{V} - \frac{\partial \delta_{AR}}{\partial \phi} \phi - \psi + \frac{x_4 \dot{\psi}}{V} \right) \end{array} \right. \quad (C.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \delta_C z_1 \\ e_2 = \delta_C z_2 \\ e_3 = \delta_C z_3 \\ e_4 = \delta_C z_4 \end{array} \right. \quad (C.6)$$

En remplaçant les équations (C.5) dans l'équation (C.1), on obtient l'équation suivante :

$$m\ddot{y} = - \sum_{i=1}^4 C_{i_{nom}} \left(\frac{\dot{y}}{V} - \psi + \frac{x_i \dot{\psi}}{V} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi \right) + \sum_{i=1}^4 C_{\gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \phi - (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \quad (C.7)$$

Après avoir introduit les incertitudes sur les rigidités de dérive des pneumatiques, il est possible de passer aux incertitudes sur la vitesse. Les équations (C.5) et (C.7) sont donc réécrites de la façon suivante:

$$z_i = C_{i_{inc}} \left[\dot{y} \left(\frac{1}{V_{cen}} + \delta_V \frac{1}{V_{inc}} \right) - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi - \psi + x_i \dot{\psi} \left(\frac{1}{V_{cen}} + \delta_V \frac{1}{V_{inc}} \right) \right] =$$

$$= C_{i_{inc}} \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi - \psi + \frac{x_i \dot{\psi}}{V_{cen}} + \delta_V \frac{1}{V_{inc}} (\dot{y} + x_i \dot{\psi}) \right) \quad i = 1, \dots, 4$$

On introduit alors les signaux suivants:

$$\begin{cases} z_5 = \frac{1}{V_{inc}} (\dot{y} + x_1 \dot{\psi}) \\ z_6 = \frac{1}{V_{inc}} (\dot{y} + x_2 \dot{\psi}) \\ z_7 = \frac{1}{V_{inc}} (\dot{y} + x_3 \dot{\psi}) \\ z_8 = \frac{1}{V_{inc}} (\dot{y} + x_4 \dot{\psi}) \end{cases} \quad (C.8)$$

$$\begin{cases} e_5 = \delta_V z_5 \\ e_6 = \delta_V z_6 \\ e_7 = \delta_V z_7 \\ e_8 = \delta_V z_8 \end{cases} \quad (C.9)$$

Il est alors possible de réécrire l'équation (C.7) en considérant les incertitudes précédentes.

$$\begin{aligned} m\ddot{y} = & - \sum_{i=1}^4 C_{i_{nom}} \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi + \frac{x_i}{V_{cen}} \dot{\psi} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi \right) \\ & + \sum_{i=1}^4 C_{\gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \phi - (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) - \\ & - (C_{1_{nom}} e_5 + C_{2_{nom}} e_6 + C_{3_{nom}} e_7 + C_{4_{nom}} e_8) \end{aligned} \quad (C.10)$$

Pour introduire les incertitudes sur les déplacements longitudinaux du centre de gravité, on considère à présent:

$$\begin{aligned} z_1 &= C_{1_{inc}} \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi + \frac{x_1 \dot{\psi}}{V_{cen}} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi + e_5 \right) \\ &= C_{1_{inc}} \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi + \frac{x_{AV_{nom}} \dot{\psi}}{V_{cen}} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi + e_5 \right) + \frac{C_{1_{inc}}}{V_{cen}} x_{AV_{inc}} \dot{\psi} \delta_x \\ z_5 &= \frac{1}{V_{inc}} (\dot{y} + x_1 \dot{\psi}) = \frac{1}{V_{inc}} (\dot{y} + x_{AV_{nom}} \dot{\psi}) + \frac{1}{V_{inc}} x_{AV_{inc}} \dot{\psi} \delta_x \end{aligned}$$

et on introduit:

$$\begin{cases} z_{10} = x_{AV_{inc}} \dot{\psi} \\ z_{11} = x_{AR_{inc}} \dot{\psi} \end{cases} \quad (C.11)$$

$$\begin{cases} e_{10} = \delta_{x_{AV}} z_{10} \\ e_{11} = \delta_{x_{AR}} z_{11} \end{cases} \quad (C.12)$$

L'équation (C.10) peut donc être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
m\ddot{y} = & - \sum_{i=1}^4 C_{i_{nom}} \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi + \frac{x_{i_{nom}}}{V_{cen}} \dot{\psi} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) + \\
& + \sum_{i=1}^4 C_{\gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \dot{\phi} - (C_{1_{nom}} e_5 + C_{2_{nom}} e_6 + C_{3_{nom}} e_7 + C_{4_{nom}} e_8) - \\
& - (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) - \left(\frac{C_{1_{nom}} + C_{2_{nom}}}{V_{cen}} \right) e_{10} - \left(\frac{C_{3_{nom}} + C_{4_{nom}}}{V_{cen}} \right) e_{11}
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Pour conclure l'analyse de l'équation (C.13), il est nécessaire d'introduire l'incertitude sur la masse, cette incertitude nous permet d'introduire les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
z_{14} = & \frac{1}{m_{inc}} \left[- \sum_{i=1}^4 C_{i_{nom}} \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi + \frac{x_{i_{nom}}}{V_{cen}} \dot{\psi} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) + \right. \\
& + \sum_{i=1}^4 C_{\gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \dot{\phi} - (C_{1_{nom}} e_5 + C_{2_{nom}} e_6 + C_{3_{nom}} e_7 + C_{4_{nom}} e_8) - \\
& \left. - (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) - \left(\frac{C_{1_{nom}} + C_{2_{nom}}}{V_{cen}} \right) e_{10} - \left(\frac{C_{3_{nom}} + C_{4_{nom}}}{V_{cen}} \right) e_{11} \right]
\end{aligned} \tag{C.14}$$

$$e_{14} = \delta_m z_{14} \tag{C.15}$$

Au finale l'équation (C.13) peut être écrite dans la forme suivante :

$$\boxed{
\begin{aligned}
\ddot{y} = & \frac{1}{m_{cen}} \left[- \sum_{i=1}^4 C_{i_{nom}} \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi + \frac{x_{i_{nom}}}{V_{cen}} \dot{\psi} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) + \right. \\
& + \sum_{i=1}^4 C_{\gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \dot{\phi} - (C_{1_{nom}} e_5 + C_{2_{nom}} e_6 + C_{3_{nom}} e_7 + C_{4_{nom}} e_8) - \\
& \left. - (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) - \left(\frac{C_{1_{nom}} + C_{2_{nom}}}{V_{cen}} \right) e_{10} - \left(\frac{C_{3_{nom}} + C_{4_{nom}}}{V_{cen}} \right) e_{11} \right] + e_{14}
\end{aligned}
} \tag{C.16}$$

Il est maintenant possible d'analyser l'équation (C.2). Parmi les incertitudes choisies lors de notre analyse de robustesse seule la vitesse en est une. En considérant la structure de l'incertitude (C.4), il est possible d'écrire l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} J_x \ddot{\phi} &= \frac{1}{V} \left[- \sum_{j=1}^2 (\chi_j \dot{\phi}) - \sum_{j=1}^2 (\Gamma_j \dot{\phi}) + \sum_{j=1}^2 \frac{t_j}{2} (F_{g_j} - F_{d_j}) \right] + J_s \dot{\psi} \\
\frac{1}{V_{cen}} J_x \ddot{\phi} &= \frac{1}{V_{cen}} \left[- \sum_{j=1}^2 (\chi_j \dot{\phi}) - \sum_{j=1}^2 (\Gamma_j \dot{\phi}) + \sum_{j=1}^2 \frac{t_j}{2} (F_{g_j} - F_{d_j}) \right] + J_s \dot{\psi} + e_9
\end{aligned}$$

$$\boxed{J_x \ddot{\phi} = \left[- \sum_{j=1}^2 (\chi_j \dot{\phi}) - \sum_{j=1}^2 (\Gamma_j \dot{\phi}) + \sum_{j=1}^2 \frac{t_j}{2} (F_{g_j} - F_{d_j}) \right] + V_{cen} (J_s \dot{\psi} + e_9)} \tag{C.17}$$

$$z_9 = \frac{1}{V_{inc}} \left[- \sum_{j=1}^2 (\chi_j \dot{\phi}) - \sum_{j=1}^2 (\Gamma_j \dot{\phi}) + \sum_{j=1}^2 \frac{t_j}{2} (F_{g_j} - F_{d_j}) - J_x \ddot{\phi} \right] \tag{C.18}$$

$$e_9 = \delta_V z_9 \quad (C.19)$$

En remplaçant (C.18) dans (C.17) , il est possible d'obtenir:

$$z_9 = -\frac{V_{cen}}{V_{inc}} \left(J_s \dot{\psi} + e_9 \right) \quad (C.20)$$

Pour terminer, il est possible de considérer maintenant l'équation (C.3). Comme l'équation (C.1), cette équation présente plusieurs paramètres parmi ceux que nous avons considérés comme incertains. Comme pour le cas précédent nous avons décidé d'introduire d'abord l'incertitudes sur la raideur de dérive. En utilisant les résultats obtenus dans l'équation (C.16), il est possible d'obtenir le résultat suivant:

$$I_z \ddot{\psi} = -\sum_{i=1}^4 C_{i_{nom}} x_i \left(\frac{\dot{y}}{V} - \psi + x_i \frac{\dot{\psi}}{V} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi \right) + \sum_{i=1}^4 \left(C_{\gamma_i} x_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \phi \right) + \sum_{i=1}^4 (y_i F_{x_i}) - (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) \quad (C.21)$$

En introduisant aussi l'incertitude sur la vitesse et en ayant pris en considération les résultats de (C.16), il est possible d'obtenir l'équation suivante

$$I_z \ddot{\psi} = -\sum_{i=1}^4 C_{i_{nom}} x_i \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi + x_i \frac{\dot{\psi}}{V_{cen}} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi \right) + \sum_{i=1}^4 \left(C_{\gamma_i} x_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \phi \right) + \sum_{i=1}^4 (y_i F_{x_i}) - (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) - (x_1 C_{1_{nom}} e_5 + x_2 C_{2_{nom}} e_6 + x_3 C_{3_{nom}} e_7 + x_4 C_{4_{nom}} e_8) \quad (C.22)$$

En suivant la même démarche utilisée pour l'analyse de l'équation (C.1), il est maintenant possible d'introduire ici l'incertitude sur le déplacement longitudinal:

$$I_z \ddot{\psi} = -\sum_{i=1}^4 C_{i_{nom}} x_{i_{nom}} \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi + x_{i_{nom}} \frac{\dot{\psi}}{V_{cen}} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi \right) + \sum_{i=1}^4 \left(C_{\gamma_i} x_{i_{nom}} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \phi \right) + \sum_{i=1}^4 (y_i F_{x_i}) - (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) - (x_1 C_{1_{nom}} e_5 + x_2 C_{2_{nom}} e_6 + x_3 C_{3_{nom}} e_7 + x_4 C_{4_{nom}} e_8) - \delta_x (e_1 + e_2 + C_{1_{nom}} e_5 + C_{2_{nom}} e_6) x_{AV_{inc}} - \delta_x (e_3 + e_4 + C_{3_{nom}} e_7 + C_{4_{nom}} e_8) x_{AR_{inc}} - \delta_x x_{AV_{inc}} \left[(C_{1_{nom}} + C_{2_{nom}}) \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi - \frac{\partial \delta_{AV}}{\partial \phi} \phi \right) + (C_{\gamma_1} + C_{\gamma_2}) \frac{\partial \gamma_{AV}}{\partial \phi} \phi \right] - \delta_x x_{AR_{inc}} \left[(C_{3_{nom}} + C_{4_{nom}}) \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi - \frac{\partial \delta_{AR}}{\partial \phi} \phi \right) + (C_{\gamma_3} + C_{\gamma_4}) \frac{\partial \gamma_{AR}}{\partial \phi} \phi \right] - 2x_{AV} \frac{(C_{1_{nom}} + C_{2_{nom}})}{V_{cen}} e_{10} - 2x_{AR} \frac{(C_{3_{nom}} + C_{4_{nom}})}{V_{cen}} e_{11} - \delta_x x_{AV_{inc}} \frac{(C_{1_{nom}} + C_{2_{nom}})}{V_{cen}} e_{10} - \delta_x x_{AR_{inc}} \frac{(C_{3_{nom}} + C_{4_{nom}})}{V_{cen}} e_{11} \quad (C.23)$$

En partant de l'équation (C.23), il est possible d'écrire les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
z_{12} &= -x_{AV_{inc}} \left[(C_{1_{nom}} + C_{2_{nom}}) \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi - \frac{\partial \delta_{AV}}{\partial \phi} \phi \right) + (C_{\gamma_1} + C_{\gamma_2}) \frac{\partial \gamma_{AV}}{\partial \phi} \phi \right] - \\
&\quad - x_{AV_{inc}} \frac{(C_{1_{nom}} + C_{2_{nom}})}{V_{cen}} e_{10} \\
z_{13} &= -x_{AR_{inc}} \left[(C_{3_{nom}} + C_{4_{nom}}) \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi - \frac{\partial \delta_{AR}}{\partial \phi} \phi \right) + (C_{\gamma_3} + C_{\gamma_4}) \frac{\partial \gamma_{AR}}{\partial \phi} \phi \right] - \\
&\quad - x_{AR_{inc}} \frac{(C_{3_{nom}} + C_{4_{nom}})}{V_{cen}} e_{11}
\end{aligned} \tag{C.24}$$

$$\begin{cases} e_{12} = \delta_x z_{12} \\ e_{13} = \delta_x z_{13} \end{cases} \tag{C.25}$$

L'équation (C.23) peut donc être réécrite sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
I_z \ddot{\psi} &= - \sum_{i=1}^4 C_{i_{nom}} x_{i_{nom}} \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi + x_{i_{nom}} \frac{\dot{\psi}}{V_{cen}} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi \right) + \sum_{i=1}^4 \left(C_{\gamma_i} x_{i_{nom}} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \phi \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 (y_i F_{x_i}) - (x_1 C_{1_{nom}} e_5 + x_2 C_{2_{nom}} e_6 + x_3 C_{3_{nom}} e_7 + x_4 C_{4_{nom}} e_8) - \\
&\quad - (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) + e_{12} + e_{13}
\end{aligned} \tag{C.26}$$

Pour conclure, nous introduisons l'incertitude sur le déplacement latéral:

$$\begin{aligned}
I_z \ddot{\psi} &= - \sum_{i=1}^4 C_{i_{nom}} x_{i_{nom}} \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi + x_{i_{nom}} \frac{\dot{\psi}}{V_{cen}} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi \right) + \sum_{i=1}^4 \left(C_{\gamma_i} x_{i_{nom}} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \phi \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 (y_{i_{nom}} F_{x_i}) - (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) - \\
&\quad - (x_1 C_{1_{nom}} e_5 + x_2 C_{2_{nom}} e_6 + x_3 C_{3_{nom}} e_7 + x_4 C_{4_{nom}} e_8) \\
&\quad + \delta_y y_{g_{inc}} (F_{x_{11}} + F_{x_{21}}) + \delta_y y_{d_{inc}} (F_{x_{12}} + F_{x_{22}}) + e_{12} + e_{13}
\end{aligned} \tag{C.27}$$

$$\begin{cases} z_{15} = y_{g_{inc}} (F_{x_{11}} + F_{x_{21}}) \\ z_{16} = y_{d_{inc}} (F_{x_{12}} + F_{x_{22}}) \end{cases} \tag{C.28}$$

$$\begin{cases} e_{15} = \delta_y z_{15} \\ e_{16} = \delta_y z_{16} \end{cases} \tag{C.29}$$

$$\boxed{
\begin{aligned}
I_z \ddot{\psi} &= - \sum_{i=1}^4 C_{i_{nom}} x_{i_{nom}} \left(\frac{\dot{y}}{V_{cen}} - \psi + x_{i_{nom}} \frac{\dot{\psi}}{V_{cen}} - \frac{\partial \delta_i}{\partial \phi} \phi \right) + \sum_{i=1}^4 \left(C_{\gamma_i} x_{i_{nom}} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \phi} \phi \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^4 (y_{i_{nom}} F_{x_i}) - (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) - \\
&\quad - (x_1 C_{1_{nom}} e_5 + x_2 C_{2_{nom}} e_6 + x_3 C_{3_{nom}} e_7 + x_4 C_{4_{nom}} e_8) \\
&\quad + e_{12} + e_{13} + e_{15} + e_{16}
\end{aligned}
} \tag{C.30}$$

Annexe D

LPV control of a road vehicle during braking action in curve

1

Abstract : In this paper, a driving assistance system is developed to control the yaw moment in the case of light braking in curve, by using the front and rear steering angles. The controller we are looking for is scheduled by the longitudinal speed. We propose a comparative analysis between two extensions of the H_∞ loop-shaping method to linear parameter-varying (LPV) plants, where the rate of variation of the scheduling parameter is assumed unbounded or bounded.

Keyword : Yaw rate control, steering assistance system, H_∞ control, LPV control.

D.1 Introduction

During the last years the safety systems have taken more and more place in the vehicles, the most famous of them being the ABS/ASR and the ESP systems. In this paper, a driving assistance system is proposed to control the yaw moment in the case of light braking in curve. Such a system has been widely studied by the car manufacturers to increase the security of the vehicles. The challenge is to keep the yaw rate as close as possible to a given reference in order to limit the over- and the under- steering of the car and to keep it on a safety trajectory during this driving action.

The control of the yaw rate of a vehicle has been largely studied. A predictive method is used in [Soh03] to control the over- and under- steering using a braking actuator. Always in the same fields, some authors applied the LQG methods like in [SNYN94] or the fuzzy logic methods [Buc02a]. In the first case the authors used the steering to obtain the yaw rate behavior, while in the second case the braking allows to control the yaw rate.

The vehicle dynamics are well described by a linear time-invariant (LTI) model for any fixed value of the longitudinal speed. However they vary significantly with the speed, which in

1. Article paru dans les Proceedings du 5th IFAC Symposium on Robust Control Design, Toulouse 5-7 Juillet 2006

addition is measured. Therefore a speed-dependent controller can be obtained using the control theory of linear parameter-varying (LPV) plants. To the authors' knowledge, the problem has still not been considered from this perspective. This approach is often used for aerospace plants [CS96], [BA99], [HDF01] but it has less been used for car control (see e.g. [PDP05] where a lateral driving assistance system is developed).

The paper is organized as follows. Section D.2 defines the problem and presents the modeling of the car. Section D.3 contains a brief summary of the LPV methods applied on the problem: the first one is the classical polytopic approach [AGB95], whereas the second one allows to take into account limitations of the parameter variation rate [AA98]. Such methods are evaluated in Section D.4 by implementing the controller on a simulation software. The conclusions and the results are finally given in the last part.

D.2 Problem definition and model of the car

D.2.1 Light brake in curve

The test called "light braking in curve" is one of the procedures to evaluate the safety customer benefit. The objective is to estimate the limits of vehicle oversteering stability during braking for a car that is engaged on a curve of a given radius and with a given adherence coefficient. The steering angle of the vehicle and the speed are defined in order to follow the curve radius and to have a given lateral acceleration, while the brake pedal gives a wished longitudinal deceleration. During the test the steering is hold constant. For some cars, during a light braking action in curve, the yaw rate has an overshoot when the driver pushes on the brake pedal. The goal of the control action is to reduce this overshoot and to follow a wished yaw rate reference. The controller performances can be evaluated by following criterion that must be keep close to one:

$$J = \max \left\{ \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\psi}_{desired}(t)} \right\} \quad (D.1)$$

D.2.2 Model of the vehicle

Since all the performances concern the lateral dynamics, only these dynamics have to be modelled. The control of the stopping distance and of the sliding being in the field of the longitudinal dynamics. They are realized by that by an independent ABS system that is available on each wheel, which controls the sliding of the wheel without communication with the others wheels.

By applying the Lagrange method, and assuming the small angles approximation, the following model of the car is obtained [Gen00]:

$$m(\dot{v} - V\dot{\psi}) = J_S\ddot{\phi} + Y_\beta\beta + Y_\psi\frac{\dot{\psi}}{V} + Y_\phi\phi + \sum_{k=1}^4 Y_{\delta_k}\delta_k + \sum_{k=1}^4 F_{xk}\delta_k + F_{y_e} \quad (D.2)$$

$$J_x\ddot{\phi} = (J_{XZS} + m_Sch)\ddot{\psi} + (\dot{v} - V\dot{\psi})J_S + L_\beta\beta + L_\phi\phi + L_{\dot{\phi}}\dot{\phi} + \sum_{k=1}^4 L_{\delta_k}\delta_k + L_\psi\frac{\dot{\psi}}{V} + F_{\phi_e} \quad (D.3)$$

TAB. D.1 – *Variables and main constants*

Symbols	Name
y	Lateral movement
v	Lateral speed
V	Longitudinal speed
ϕ	Roll angle
ψ	Yaw angle
β	Side slip angle
δ_k	Steering angle of wheel k
F_{y_e}	Lateral disturbance force
F_{ϕ_e}	Disturbance force on the roll angle
M_{z_e}	Disturbance moment on the yaw angle
F_{xk}	Longitudinal force on wheel k
x_k, y_k	Distance between wheel k and the COG on the x and y-axis

$$J_z \ddot{\psi} = N_\beta \beta + N_\psi \frac{\dot{\psi}}{V} + \sum_{k=1}^4 N_{\delta_k} \delta_k - \sum_{k=1}^4 F_{xk} y_k + \sum_{k=1}^4 x_k F_{xk} \delta_k + M_{z_e} \quad (\text{D.4})$$

$$\beta = \frac{v}{V} - \psi \quad (\text{D.5})$$

where the meaning of the time-dependent variables and the main constants are given on Table I. All other symbols represent constant coefficients depending on the vehicle, on the load and on the tyres characteristics.

The longitudinal speed V is measured and can be considered as a time-varying parameter. Assuming that F_{xk} is constant during the test, a LPV state-space representation can therefore be obtained from these equations, with state vector $x = [v \ \phi \ \dot{\phi} \ \psi \ \dot{\psi}]^T$ and control vector $u = [\delta_{AV} \ \delta_{AR}]^T$, where δ_{AV} is the steering angle of the front wheels, and δ_{AR} that of the rear wheels (i.e. $\delta_1 = \delta_2 = \delta_{AV}$ and $\delta_3 = \delta_4 = \delta_{AR}$). The output to be controlled is $\dot{\psi}$, which is also measured.

D.3 LPV Control

The aim of LPV control theory [AGB95] is to control linear plants whose state-space representation depends on a vector of exogenous parameters :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\rho)x + B_1(\rho)w + B_2u \\ e &= C_1(\rho)x + D_{11}(\rho)w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

where w and u are the disturbance and control inputs, while e and y are the controlled error and the measured output. If vector ρ is measured on-line, one can search for a controller which also depends on ρ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_K &= A_K(\rho)x + B_K(\rho)y \\ u &= C_K(\rho)x + D_K(\rho)y\end{aligned}\tag{D.7}$$

If matrices $A(\rho), B_1(\rho), C_1(\rho), D_{11}(\rho)$ are supposed to be affine in ρ , a great number of techniques are available to design the controller. Two of them will be considered for our application.

D.3.1 Classical polytopic approach

Suppose ρ evolves in a polytope \mathcal{P} of vertices P_1, \dots, P_N , and let the state-space realizations of the plant at vertex P_i , its controller and the corresponding closed-loop plant be $(A_i, B_{11i}, \dots, D_{21i})$, $(A_{K_i}, B_{K_i}, C_{K_i}, D_{K_i})$, $(A_{cl_i}, B_{cl_i}, C_{cl_i}, D_{cl_i})$ respectively. According to [AGB95], there exists a controller (D.7) insuring $\|e(t)\|_2 < \gamma\|w(t)\|_2$ for all trajectory of ρ in \mathcal{P} if and only if a positive definite matrix X exists, which simultaneously satisfies the N matrix inequalities:

$$\begin{pmatrix} A_{cl_i}^T X + X A_{cl_i} & X B_{cl_i} & C_{cl_i}^T \\ B_{cl_i}^T X & -\gamma I & D_{cl_i}^T \\ C_{cl_i} & D_{cl_i} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \tag{D.8}$$

$i = 1, \dots, N$

These inequalities are bilinear in the decision variables X and $A_{K_i}, B_{K_i}, C_{K_i}, D_{K_i}$. It is however well known that they can be reduced using projections to a set of $2N + 1$ linear matrix inequalities. The state-space realizations of the controller for each vertex being deduced from their solution. Minimizing γ under these constraints is therefore a convex optimisation problem.

At each time, vector ρ can be expressed as a barycenter of vertices P_1, \dots, P_N . The current controller is therefore obtained as the barycenter of the controllers of each vertex, with the same coefficients.

D.3.2 Polytopic approach with bounded rate

The previous approach assumes no limitation on $\dot{\rho}$: vector ρ is therefore allowed to vary arbitrarily fast, which is actually not the case in many practical situations. Suppose now that the rate of variation of each component of ρ is bounded:

$$\dot{\rho}_i(t) \in [\underline{\nu}_i, \overline{\nu}_i], \quad \forall t \geq 0 \tag{D.9}$$

According to [AA98], there exists a controller (D.7) insuring $\|e(t)\|_2 < \gamma\|w(t)\|_2$ for all admissible trajectory of ρ whenever there exist parameter-dependent positive definite matrices X and Y and a parameter-dependent quadruple of state-space data $(\hat{A}_K, \hat{B}_K, \hat{C}_K, D_K)$ such that for all admissible pair $(\rho, \dot{\rho})$, the LMI (D.11) at the top of the next page holds, together with:

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \tag{D.10}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + XA + \hat{B}_K C_2 + (*) & * & * & * \\ \hat{A}_K^T + A + B_2 D_K C_2 & -\dot{Y} + AY + B_2 \hat{C}_K + (*) & * & * \\ (XB_1 + \hat{B}_K D_{21})^T & (B_1 + B_2 D_K D_{21})^T & -\gamma I & * \\ C_1 + D_{12} D_K C_2 & C_1 Y + D_{12} \hat{C}_K & D_{11} + D_{12} D_K D_{21} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{D.11})$$

Inequalities (D.10)-(D.11) are linear in the decision variables; they define a convex but infinite-dimensional problem, due to the dependence in ρ . They can be reduced to a finite-dimensional problem by enforcing the dependence of $X, Y, \hat{A}_K, \hat{B}_K, \hat{C}_K, D_K$ in ρ and defining a finite set of inequalities by gridding the value set of ρ (see the application detailed in section D.4).

At each time, the current controller is deduced on-line from the current value of ρ and from the above matrices.

D.4 Proposed solution

D.4.1 Definition of the polytope

The time-varying parameter V affects significantly the dynamics of the plant. A time-invariant controller is therefore expected to be inadequate to obtain satisfying performances in the light brake curve context, where the longitudinal speed can have different initial values and decreases significantly. On the other hand, this parameter is measured and is therefore available to enter in an LPV controller.

From equations (D.2) to (D.5), it is clear that the state-space matrices of the model depend affinely on V and $1/V$. We therefore consider as time-varying parameter $\rho = (\rho_1, \rho_2)^T = (V, 1/V)^T$, whose domain of variation is the hyperbole $\rho_2 = 1/\rho_1$ (see figure D.1), for $\rho_1 \in [V_{min}; V_{max}]$, where $[V_{min}; V_{max}]$ represents the velocity range.

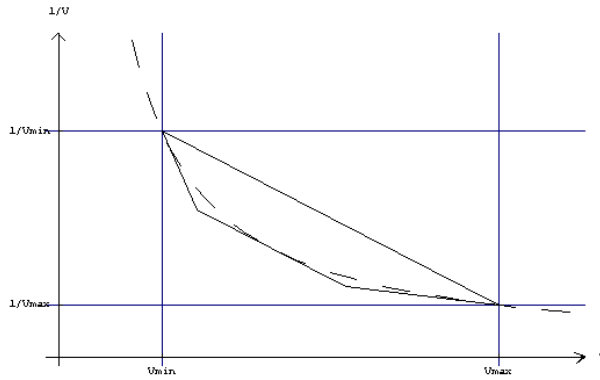


FIG. D.1 – *Structure of the polytope*

This domain has to be included in a polytope which has to be chosen as small as possible. We define to this end the trapezoidal domain shown on figure D.1: it is first limited by the segment $[(V_{min}, 1/V_{min}), (V_{max}, 1/V_{max})]$; two other edges are the tangents at points $(V_{min}, 1/V_{min})$ and

$(V_{max,1}/V_{max})$; the last edge is the line which is parallel to the first segment and tangent at the hyperbole.

Obviously it is not allow to choose $V_{min} = 0$ in order to have a finite domain. Furthermore the value of V_{min} has to be chosen high enough to reduce the surface of the polytope: this means that for all velocities smaller than V_{min} , the controller of the vertex $(V_{min,1}/V_{min})$ will be applied. Since the dynamics are not significantly varying at low speed, this is not a severe limitation.

D.4.2 Design of the control law

In order to tune the performances, it is possible to apply the H_∞ loop-shaping approach developed in [FG92] for LTI plants, which is interesting for several reasons: the performances are simply addressed by tuning compensators introduced on the control inputs and the controlled outputs, according to the classical rules of Automatic Control. This method is known to provide interesting robustness properties to the closed-loop plant and to preserve the continuity of the controller data with respect to the plant data (this later point is of great interest in the LPV context).

According to this approach, low-pass filters are applied on each control input to reduce the measurement noise, to insure the robustness against neglected dynamics and to reduce the actuators' activity. A PI filter associated with a low pass filter is applied on output ψ to obtain a small tracking error and to increase the stability margins (figure D.2):²

$$W_1^{AV}(s) = \frac{K_1^{AV}}{(1+\tau_1^{AV}s)} \quad (D.12)$$

$$W_1^{AR}(s) = \frac{K_1^{AR}}{(1+\tau_1^{AR}s)} \quad (D.13)$$

$$W_2^\psi(s) = K_2 \frac{1+\tau_2 s}{s(1+\tau_2' s)} \text{ with } \tau_2 > \tau_2' \quad (D.14)$$

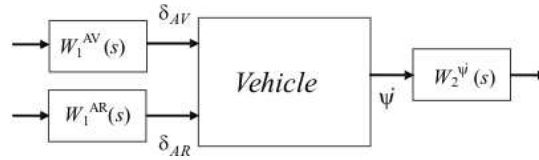


FIG. D.2 – *Structure of the shaped plant*

The parameters of these filters are chosen constant (i.e. independent of V) to simplify the design (in addition, matrices B_2, D_{12}, C_2, D_{21} will be independent of ρ as supposed in (D.6)).

The LPV control theory will then be applied on the shaped plant of figure D.2.³

For both approaches, V is considered in the set $[30; 120]$ km/h. According to the procedure described in D.2.1 for the bounded rate approach, \dot{V} is supposed to belong to the interval $[-2; 1]$ m/s². The typical values of the car considered are shown in Table D.2.

2. For reason of confidentiality the numerical values of the parameters cannot be given.

3. In the spirit of the H_∞ loop-shaping approach, input w includes a disturbance on each input and output of the shaped plant, while output e includes the disturbed output and the control input.

TAB. D.2 – *Numerical values*

Variables and symbols	values	physical units
Weight of the vehicle - m	1700	kg
Footing - l	2,741	m
Front way - t_1	1525	mm
Rear way - t_2	1480	mm
Inertia on the z axis - J_z	3000	kg m ²
Front coefficients of drift - $C_1 C_2$	1250	N /deg
Rear coefficients of drift - $C_3 C_4$	1085	N /deg
F_{xk}	300	N

For the classical polytopic approach, the LMIs (D.8) are considered at the 4 vertices of the polytope of figure D.1. For the bounded rate approach, matrices X and Y are define as affine functions of V ⁴:

$$X(\rho) = X_0 + X_1 V \quad (\text{D.15})$$

$$Y(\rho) = Y_0 + Y_1 V \quad (\text{D.16})$$

while matrices $\hat{A}_K, \hat{B}_K, \hat{C}_K, D_K$ have been chosen either constant or also affine in V (this later choice giving no improvement on the results, only the first case will be presented). Such a choice gives $\dot{X} = X_1 \dot{V}$ and $\dot{Y} = Y_1 \dot{V}$. The LMIs (D.10)-(D.11) are then solved by considering a griding of 20 values of (ρ_1, ρ_2) in the polytope and, for each of them, both extreme values of \dot{V} . The LMI (D.11) with the obtained solution is then checked for a denser grid of 76 values.

By tuning the controller, we decided to limit the steering angles of the front and rear wheels: the first value is of the same magnitude as the maximal angle given by the driver, while the second one is limited by the maximal actuators angle; both values are chosen to avoid the saturation of the tyres.

The optimal values obtained for γ are 2.5037 with the classical approach and 2.4271 in the bounded rate case. As expected, this later value is somewhat smaller (since the allowable trajectories of ρ are limited) but the difference is not significant.

D.4.3 Results

The complete structure of the closed-loop system is given on figure D.3: the driver uses the steering of the front wheels, whereas a feedforward path interprets the driver's action to define the desired yaw rate $\dot{\psi}_d$. The controller doesn't erase the driver's action but adds a supplementary angle on the front wheels and also uses the rear wheels to reject the disturbances.

The results obtained applying the LPV control on a light braking action situation are now presented. The test has been realized on a curve with 150 m radius and on a road with an

4. Terms including $1/V$ could be considered, but they increase the complexity and without significant improvement

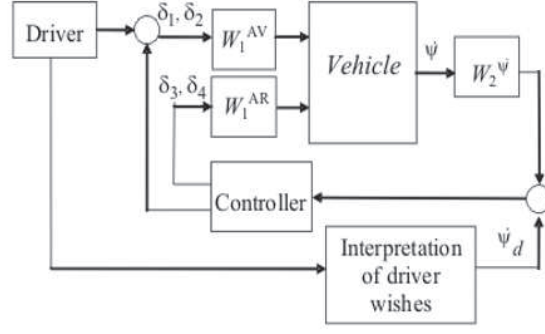


FIG. D.3 – *Structure of the control system*

adherence coefficient of 1. The initial speed of the vehicle is 110 km/h. The driver chooses the steering angle at the beginning of the test and keeps it constant during the test. In these conditions, the car has a tendency to have oversteering when the brake pedal is stroked.

All the results shown below are obtained with a complete non linear simulator of the vehicle dynamics.

Figure D.4 shows the criterion J ; the front and rear steering inputs are shown in figures D.5 and D.6. In these figures the following line definitions are used: the solid line indicates the value obtained without control, the dotted line is used for the classical LPV control law, while the dashed line corresponds to the bounded rate LPV control law. In figure D.7 the trajectories of the car in the different cases are plotted; here the dashed-dotted line is used for the ideal trajectory (i.e. without braking).

The desired value of J is 1, which is of course impossible to obtain due to a non zero time response of the feedback loop. However it is obvious from figure D.4 that the criterion is significantly reduced when any of the LPV control law is active and the vehicle is near to the neutral condition: the obtained values are only 2.5% higher than 1, which is very satisfying.

It is also possible to see from figure D.4 that the values of J for both LPV controllers are not significantly different: it only returns slightly more quickly to 1 in the bounded rate case. From figures D.5 and D.6, we can see that the bounded case gives a bigger activity of the control inputs, which is the reason why the criterion is more satisfying.

When looking figure D.7, it is easy to see that both control laws insure the wished trajectory, whereas a line changing is observed without control. It is also possible to see that the car has a little oversteering when the control law is active, that is welcome for this type of application.

D.5 Conclusion

In this paper, a solution for the light braking in curve test has been presented using two LPV polytopic methods, which assume unbounded or bounded rate parameter variations respectively.

Both solutions allow synthesizing the control law on a wide set of speed and obtaining satisfying results using only the front and rear steering angles and thus without using any shock absorber or braking control.

A fixed H_∞ controller would not be able to give such performances: in fact, despite good

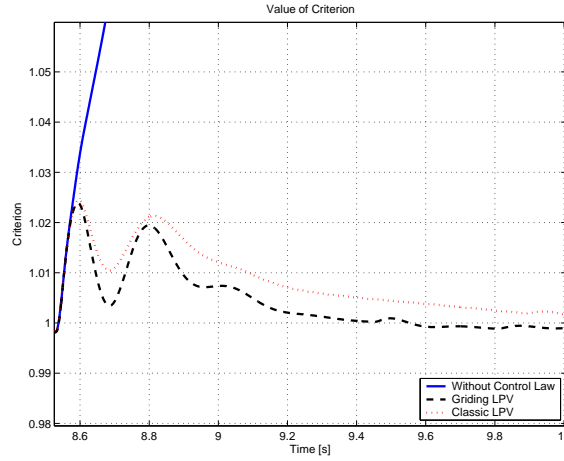


FIG. D.4 – *Criterion J (normalized yaw rate)*

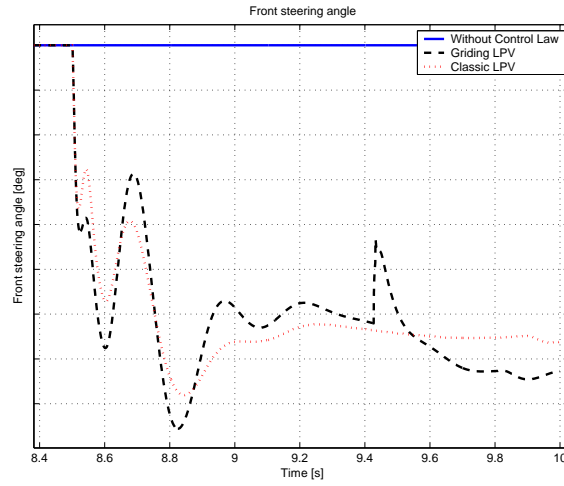


FIG. D.5 – *Front steering angle*

robustness properties, it is well adapted only for a less wide set of speed. To have a good value of the criterion, it has therefore to be computed for a fixed V that must be equal to the initial speed of the vehicle. The answer in this case is slower than in the LPV case. Furthermore all the response is deteriorated, if the test is performed with another speed.

From the obtained results on this application, it is difficult to say that taking into account limitations on the parameter rate in the LPV synthesis gives significant improvement, so that a typical customer will not feel the difference between the two LPV controllers. The bounded rate case needs a bigger control computation time: it is necessary to solve a bigger LMI problem and the on-line implementation also requires more computational task. Therefore, for our particular application, the use of a bounded rate LPV control is not of great interest; but in another context where the deceleration is bigger, his good capacity to follow the reference could be used to have a more efficient control law.

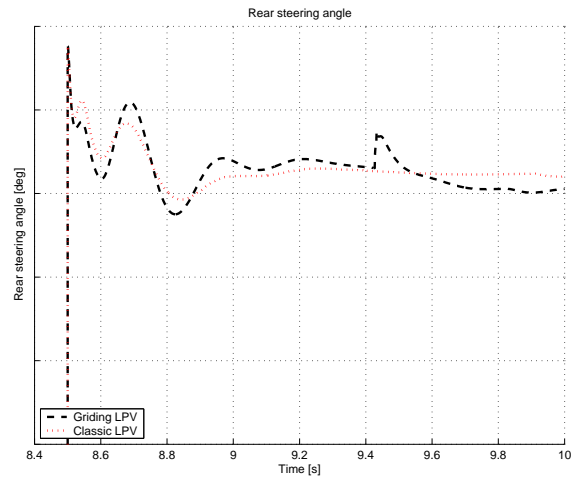


FIG. D.6 – *Rear steering angle*

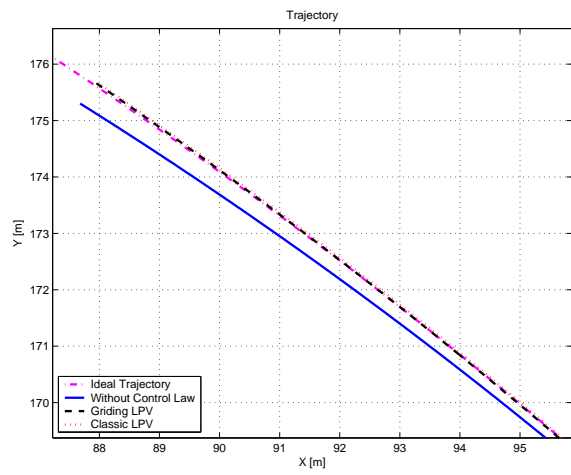


FIG. D.7 – *Trajectory of the car*

Bibliographie

- [AA98] P. Apkarian and R.J. Adams. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 6(1):21–32, 1998.
- [AGB95] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker. Self-scheduled \mathcal{H}_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica*, 37:1251–1261, 1995.
- [AGS⁺95] J. Ackermann, J. Guldner, W. Sienel, R. Steinhauser, and V.I. Utkin. Linear and nonlinear controller design for robust automatic steering. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3(1):132 – 143, 1995.
- [AHB03] A.Gordon, M. Howell, and F. Brandao. Integrated control methodologies for road vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 40(1-2):157–190, 2003.
- [Anw03] S. Anwar. A predictive control algorithm for a yaw stability management system. *SAE Paper 2003-01-1294*, 2003.
- [BA99] J.M. Biannic and P. Apkarian. Missile autopilot design via a modified lpv synthesis technique. *Aerospace Science and Technology*, (3):153–160, 1999.
- [BB97] C. Beck and P. Bendotti. Model reduction methods for unstable uncertain systems. In *Conference on Decision and Control*, 1997.
- [BGFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Studies in applied mathematics siam edition, 1994.
- [BNP87] E. Bakker, L. Nybord, and H.B. Pacejka. Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies. *SAE paper 870421*, 1987.
- [BPL89] E. Bakker, H.B. Pacejka, and L. Lidner. A new model with an application in véhicule dynamics studies. *SAE paper 890087*, 1989.
- [Buc02a] K.R. Buckholtz. Use of fuzzy logic in wheel slip assignement part i: Yaw rate control. *SAE Paper 2002-01-1221*, 2002.
- [Buc02b] K.R. Buckholtz. Use of fuzzy logic in wheel slip assignement part ii: Yaw rate control with sideslip angle limitation. *SAE Paper 2002-01-1220*, 2002.
- [Cec00] I. Cech. Anti-roll and active roll suspensions. *Vehicle System Dynamics*, 33:91–106, 2000.
- [CPPGP] X. Claeys, L. Palladino, P. Pognant-Gros, and R. Pothin. Confidentielle. *Confidentielle*.
- [CS96] H. Carter and J.S. Shamma. Gain-scheduled bank to turn autopilot design using linear parameter varying transformations. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, (19):1056–1063, 1996.
- [DF99] G. Duc and S. Font. *Commande H_∞ et μ -analyse*. Hermes edition, 1999.

- [DHMS05] E. Debernard, T. Hermitte, J.G. Meyrignac, and M.C. Simon. Global chassis control - analyse accidentologique. Technical report, 2005.
- [DK02] M. Durali and A.R. Kassaiezadeh. Fuzzy and neuro-fuzzy controleur for active suspension. *SAE Paper 2002-01-2204*, 2002.
- [dWOAL95] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K.J. Aström, and P. Lischinsky. A new model for control of system with friction. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 40(3), 1995.
- [dWT99] C. Canudas de Wit and P. Tsiotras. Dynamic tyre friction models for vehicle traction control. In *Conference on Decision and Control*, 1999.
- [dWTV⁺03] C. Canudas de Wit, P. Tsiotras, E. Velenis, M. Basset, and G. Gissinger. Dynamic friction model for road/tire longitudinal interaction. *Vehicle System Dynamics*, 39(3), 2003.
- [FG92] D. Mc Farlane and K. Glover. A loop-shaping desing procedure using h_∞ -synthesis. *IEEE Transaction on Automatic Control*, (37):759–769, 1992.
- [Fon95] S. Font. *Méthodologie pour Prendre en Compte la Robustesse des Systèmes Asservis: Optimisation H_∞ et Approche Symbolique de la Forme Standard*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay et Supélec, 1995.
- [FSB⁺88] R.D. Fruenchte, N.A. Schilke, N.M. Boustany, A.M. Karmel, and B.S. Repa. Integrated vehicle control. In *International Congress on Transportation Electronics*, 1988.
- [GA96] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to h_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 41(3):436–442, 1996.
- [GAC96] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilal. Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41, 1996.
- [Gay00] F. Gay. *Lois de Commande en Vue du Contrôle Global de Châssis d’un Vehicule: le CGC*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2000.
- [GCRdL00] F. Gay, N. Coudert, I. Rifqi, and Ph. de Larminat. Development of hydraulic active suspension with feedforward and feedback design. *SAE Paper 2000-01-0104*, 2000.
- [Gen00] G. Genta. *Meccanica dell’autoveicolo*. Levrotto e bella edition, 2000.
- [Gou05] E. Goudswaard. Vehicle handling enhancement using active roll stabilization actuators. Master’s thesis, Technische Universiteit Delft, 2005.
- [Hac04] A.B. Hac. Unified control of vehicle dynamics using force and moment control. *United States Patent US 2004/01284044 A1*, 2004.
- [HDF01] A. Hired, G. Duc, J. Friang, and D. Farret. Linear-parameter-varying loop-shaping h_{inf} -synthesis for a missile autopilot. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, (24):879–886, 2001.
- [HHET93] Y. Hirano, H. Harada, E.Ono, and K. Takanami. Development of an integrated system of 4ws and 4wd by h_∞ control. *SAE Paper 930267*, 1993.
- [Hir99] A. Hired. *Pilotage Robuste d’un Missile sur un Large Domaine de Vol - Synthèse et Analyse dans le cadre H_∞ et LPV*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay et Supélec, 1999.

- [HMEH95] R. Hadelier, R.H. Mergenthaler, A. Erban, and G. Heess. Vehicle movement dynamics control system. *United States Patent 5 455 770*, 1995.
- [HON99] S. Horiuchi, K. Okada, and S. Nohtomi. Effects of integrated control of active four steering and individual wheel torque on vehicle handling and stability - a comprarision of alternative control strategies. *Vehicle System Dynamics*, 33:680–619, 1999.
- [KKLH03] D. Kim, K. Kim, W. Lee, and I. Hwang. Development of mando esp (electronic stability program). *SAE Paper 2003-01-0101*, 2003.
- [KKY⁺04] Y. Kou, W. Kim, S. Yoon, J. Lee, and D. Kim. Integration chassis control (icc) systems of mando. *SAE Paper 2004-01-2044*, 2004.
- [KN05] U. Kiencke and L. Nielsen. *Automotive Control Systems*. Springer edition, 2005.
- [Kon02] D. Konik. Development of the dynamics drive for the new 7 series of the bmw group. *Internationl Journal of Vehicle Design*, 28(1,2,3), 2002.
- [KP01] B. Kwak and Y. Park. Robust vehicle stability controller based on multiple sliding mode control. *SAE Paper 2001-01-1060*, 2001.
- [KS02] F.N. Koumboulis and M.G. Skarpetis. Robust control of cars with front and rear wheel steering. In *Control Theory and Applications*, volume 149, pages 349–404, 2002.
- [Mam92] S. Mammar. *Commande Multivariable Robuste par les Approches LQR/LTR et H_∞* . PhD thesis, Université Paris XI Orsay et Supélec, 1992.
- [MCBS00] W. Manning, D. Crolla, M. Brown, and M. Selby. Co-ordination of chassis systems for vehicle motion control. In *International Symposium on Advanced Vehicle Control, AVEC 2000*, 2000.
- [MHIY92] S. Matsumoto, H. Yamaguchi, H. Inoude, and Y. Yasuno. Improvement of vehicle dynamics through braking force distribution control. *SAE Paper 920645*, 1992.
- [OEDS⁺04] W.A.H. Oraby, S.M. El-Demerdash, A.M. Selim, A. Faizz, and D.A. Crolla. Improvement of vehicle lateral dynamics by active front steering control. *SAE Paper 2004-01-2081*, 2004.
- [Pac02] H.B. Pacejka. *Tyre and Vehicle Dynamics*. Butterwoth heinemann edition, 2002.
- [Pal03] L. Palladino. Synthèse de correcteurs robustes d’ordre réduit par l’optimisation h-infini et les inégalités matricielles linéaires. application au contrôle latéral d’un véhicule. Master’s thesis, Ecole Supérieure d’Electricité, 2003.
- [PDP05] L. Palladino, G. Duc, and R. Pothin. Lpv control for μ -split braking assistance of a road vehicle. In *Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2005.
- [PDP06] L. Palladino, G. Duc, and R. Pothin. Lpv control of a road vehicle during braking action in curve. In *Symposium on Robust Control Design*, 2006.
- [Pha90] A.T. Pham. *Nouvelle méthode de modélisation de la dynamique des véhicules*. Clesia edition, 1990.
- [PKPB91] A. Packard, K.Zhou, P. Pandey, and G. Becker. A collection of robust control problems leading to lmi’s. In *Conference on Decison and Control*, pages 1245–1250, 1991.

- [Rah04] T. Raharijona. *Commande Robuste pour le Contrôle Latéral de Véhicule*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay et Supélec, 2004.
- [SA91a] J.F. Shamma and M. Athans. Gain scheduling potential hazards and possible remedies. *American Control Conference*, pages 516–521, 1991.
- [SA91b] J.F. Shamma and M. Athans. Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plant. *Automatica*, 27:559–564, 1991.
- [SC92] J.F. Shamma and J.R. Cloutier. A linear parameter-varying approach to gain scheduled missile autopilot. In *American Control Conference*, pages 1321–1371, 1992.
- [SC03] D.J.M. Sampson and D. Cebon. Active roll control of single unit heavy road vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 40(4):229–270, 2003.
- [Sco97] G. Scorletti. *Approche Unifiée de l'Analyse et de la Commande des Systèmes par Formulation LMI*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay et Supélec, 1997.
- [Sit83] A. Sitchin. Acquisition of transient tire force and moment data for dynamic vehicle handling simulations. *SAE paper 831790*, 1983.
- [SITI92] S. Sato, H. Inoue, M. Tabata, and S. Inagaki. Integrated chassis control system for improved vehicle dynamics. In *International Symposium on Advanced Vehicle Control, AVEC 1992*, 1992.
- [SM01] T. Shim and D. Margolis. Using μ feedforward for vehicle stability enhancement. *Vehicle System Dynamics*, 35(2):103–119, 2001.
- [SN03] M. Shino and M. Nagai. Independent wheel torque control of a small scale electric vehicle for handling and stability improvement. *JSAE Review*, 24:449–456, 2003.
- [SNYN94] T. Shiotsuka, A. Nagamatsu, K. Yoshida, and M. Nahgaoka. Active control of drive motion of four wheel steering car with neural network. *SAE Paper 940229*, 1994.
- [Soh03] A. Sohel. A predictive control algorithm for a yaw stability management system. *SAE Paper 2003-01-1284*, 2003.
- [SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control*. Wiley edition, 2005.
- [SW05] Carsten Scherer and Siep Weiland. *Linear Matrix Inequalities in Control*. Rapport interne - delft university of technology edition, 2005.
- [SY05] X. Shen and F. Yu. A novel integrated chassis control design combining active suspension and 4ws. *SAE Paper 2005-01-3566*, 2005.
- [TEG⁺06] A. Traechtler, T. Ehret, M. Gerdes, V. Mehl, K.H. Wu, and D. Patient. Coordination of vehicle dynamics control system with a rear-wheel steering system. *United States Patent US 2006/0025896 A1*, 2006.
- [TII92] H. Tanaka, H. Inoue, and H. Iwata. Development of a vehicle integrated control system. In *Institution of Mechanical Engineers*, 1992.
- [TKF03] F. Tahami, R. Kazemi, and S. Farhanghi. Direct yaw control of an all-wheel drive ev based on fuzzy logic and neural networks. *SAE Paper 2003-01-0956*, 2003.
- [VC98] C. Valentin-Charbonnel. *Commande Robuste avec Contrainte d'Ordre, par la Norme H_∞ et le Formalisme LMI - Application au Contrôle d'Attitude d'un*

Satellite d'Observation de la Terre. PhD thesis, Université Paris XI Orsay et Supélec, 1998.

- [VTdWS05] E. Velenis, P. Tsiotras, C. Canudas de Wit, and M. Sorine. Dynamic tyre friction models for combined longitudinal and lateral vehicle motion. *Vehicle System Dynamics*, 43(1), 2005.
- [Wan98] P. Wanke. System for controlling yaw moment based on an estimated coefficient of friction. *United States Patent 5 711 024*, 1998.
- [WH95] D.E. Williams and W.H. Haddad. Nonlinear control of roll moment distribution to influence vehicle yaw characteristics. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 3(1), 1995.
- [WWXC05] J. Wang, D.A. Wilson, W. Xu, and D.A. Crolla. Active suspension control to improve vehicle ride and steady-state handling. In *Conference on Decision and Control European Control Conference*, 2005.
- [YKK⁺90] Y. Yokoya, R. Kizu, H. Kawaguchi, K. Ohashi, and H. Ohno. Integrated control system between active control suspension and four wheel steering for the 1989 celica. *SAE Paper 901748*, 1990.
- [ZD97] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essential of Robust Control*. Prentice hall edition, 1997.
- [ZDG94] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice hall edition, 1994.
- [ZEP⁺96] A. Van Zanten, R. Erhardt, G. Pfaff, F. Kost, U. Hartmann, and T. Ehret. Control aspects of the bosch-vdc. In *International Symposium on Advanced Vehicle Control, AVEC 1996*, pages 573–607, 1996.
- [ZKMAEB98] Y. Zeyada, D. Karnopp, M.El-Arabi, and E.S. El-Behiry. A combined active-steering differential-braking yaw rate control strategy for emergency maneuvers. *SAE Paper 980230*, 1998.